

SUJET PRÉPA BAC N°16

Durée : 4 h | Unité graphique : 2 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

NB : Les exercices 1 et 2 ne sont pas liés.

EXERCICE 1 4 PTS

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher. U_1 contient 6 boules bleues et 4 boules rouges. U_2 contient 3 boules bleues et 2 boules rouges.

On tire au hasard une boule de U_1 , on la met dans U_2 , puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la remet dans U_1 . L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

On considère les événements : A : « les urnes se retrouvent dans leur configuration initiale après l'épreuve » | B : « l'urne U_2 contient exactement deux boules bleues après l'épreuve ».

- 1) Construire un arbre pondéré de probabilité.
- 2) Vérifier que $P(A) = \frac{3}{5}$ et calculer $P(B)$.
- 3) Un joueur mise 200 F CFA et effectue une épreuve. À l'issue de l'épreuve, on compte le nombre de boules bleues dans U_2 . Si U_2 contient une seule boule bleue, le joueur reçoit 600 F CFA. Si U_2 contient deux boules bleues, il ne reçoit rien. Si U_2 contient trois boules bleues, il reçoit 200 F CFA. Soit X le gain algébrique du joueur.
 - a– Déterminer les valeurs prises par X et leur probabilité.
 - b– Dresser la loi de probabilité de X .
 - c– Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.
 - d– Ce jeu est-il équitable ? Justifier.
- 4) FATI joue cinq fois de suite indépendamment à ce jeu. Calculer la probabilité qu'elle obtienne exactement une fois un gain strictement positif.

On donne : $\left(\frac{17}{20}\right)^4 \approx 0,52$.

EXERCICE 2 4 PTS

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On désigne par I le point d'affixe i . On associe au point M d'affixe z ($z \neq i$) le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{iz + 2}{z - i}$$

- 1)
 - a– Exprimer z en fonction de z' .
 - b– Montrer que si M appartient à l'axe des abscisses, son image M' appartient au cercle de centre $\frac{3i}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
- 2)

a– Vérifier que $z' = i + \frac{1}{z-i}$. En déduire une interprétation géométrique de $|z' - i|$ et de $\arg(z' - i)$.

b– En déduire que $IM' \times IM = 1$ et $\arg(z' - i) = -\arg(z - i) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

3)

a– Montrer que pour tout $z \neq i$: $(z' - i)(z - i) = 1$.

b– En déduire que $IM' \times IM = 1$.

c– En déduire que lorsque le point M parcourt le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{3}$, les points M' sont sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

PROBLÈME 12 PTS

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{e(x-2)}{x+1} + \ln x$$

1) Calculer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.

2) Étudier les variations de g sur $]0; +\infty[$ et dresser le tableau de variations.

3)

a– Montrer que $g(x) = 0$ admet une unique solution β sur $]0; +\infty[$ et que $\beta \in]1,5; 2[$.

b– Calculer $g(1)$ et interpréter le résultat.

4) Donner le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x \ln(x+1) & \text{si } x > -1 \\ \frac{e(x-2)}{x+1} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f . Donner si possible une interprétation graphique.

3) Étudier la continuité de f en $x = -1$.

4) Étudier la dérivabilité de f en $x = -1$. En déduire une conséquence graphique.

5) Montrer que la droite $(D_0) : y = e$ est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.

6) Calculer $f'(x)$ suivant les valeurs de x et étudier le signe de $f'(x)$.

7) Dresser le tableau de variations de f .

8) Construire (C) avec ses droites remarquables.

PARTIE C

Soit h la restriction de f à $[0; +\infty[$ et (C') la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère.

1) Montrer que h réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

2) Dresser le tableau de variations de h^{-1} .

3) Justifier puis construire (C') dans le même repère que (C) .

On donne : $e \approx 2,72$ / $\ln(0,2) \approx -1,6$ / $\ln(0,3) \approx -1,2$ / $\ln(1,3) \approx 0,26$ / $\ln(1,4) \approx 0,34$ / $\ln 2 \approx 0,69$.