

SUJET PRÉPA BAC N°15

Durée : 4 h | Unité graphique : 2 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

NB : Les exercices 1 et 2 ne sont pas liés.

EXERCICE 1 4 PTS

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 2 cm. On désigne par A, B, C et M les points d'affixes respectives $a = 2i$, $b = 3 + i$, $c = -1 + i$ et z . On associe au point M le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{(1 - 2i)z + 2}{z - 2i}$$

1)

a– Exprimer z en fonction de z' .

b– Montrer que si M appartient à l'axe des abscisses, son image M' appartient au cercle de centre C et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

2)

a– Vérifier que $z' = (1 - 2i) + \frac{2(3 + i)}{z - 2i}$. En déduire une interprétation géométrique du module et d'un argument de $z' - (1 - 2i)$.

b– En déduire que $|z' - (1 - 2i)| \times AM = 2\sqrt{10}$ et $\arg(z' - (1 - 2i)) = \arg(3 + i) - \arg(z - 2i) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

3)

a– Montrer que pour tout $z \neq 2i$: $(z' - (1 - 2i)) \times (z - 2i) = 2(3 + i)$.

b– En déduire que $|z' - (1 - 2i)| \times AM = 2\sqrt{10}$.

c– En déduire que lorsque le point M parcourt le cercle de centre A et de rayon $r = \sqrt{10}$, les points M' d'affixe z' sont tous sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 4 PTS

Un jeu de hasard est organisé dans une fête scolaire. Chaque joueur mise **200 F CFA** pour participer à une épreuve. La probabilité d'obtenir un gain strictement positif à cette épreuve est $p = \frac{1}{4}$. Si le joueur obtient un gain strictement positif, il reçoit **500 F CFA** ; sinon il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire égale au **gain algébrique** du joueur.

a– Déterminer les valeurs prises par X et leur probabilité.

b– Dresser la loi de probabilité de X .

c– Montrer que l'espérance mathématique est $E(X) = -75$ F CFA.

d– Interpréter le résultat : ce jeu est-il favorable au joueur ou à l'organisateur ?

4) FATI joue à un autre jeu dans lequel la probabilité d'obtenir un gain strictement positif à chaque épreuve est $\frac{3}{20}$. Elle joue cinq fois de suite indépendamment. Calculer la probabilité qu'elle obtienne **exactement une fois** un gain strictement positif.

On donne : $\frac{3}{20} = 0,15$ et $\left(\frac{17}{20}\right)^4 = 0,52$.

PROBLÈME 12 PTS

PARTIE A

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ 1 - \sqrt{3x - 2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2 cm.

- 1) Déterminer en justifiant l'ensemble de définition D_f de f .
- 2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f et donner, si possible, une interprétation graphique.
- 3) Étudier la continuité de f en $x = 1$.
- 4) Étudier la dérivabilité de f en $x = 1$. Interpréter graphiquement le résultat.
- 5) Étudier les branches infinies de f .
- 6) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
- 7) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x = 0$.
- 8) Tracer (C) et ses droites remarquables dans le repère.

PARTIE B

Soit h la restriction de f à $I = [1; +\infty[$ et (C') la courbe représentative de la bijection réciproque h^{-1} .

- 1) Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
- 2) Calculer les variations de h^{-1} et expliciter $h^{-1}(x)$.
- 3) Expliquer la construction de (C') puis la tracer dans le même repère que (C) .

PARTIE C

On désigne par (Δ) la droite d'équation $y = x - 3$. Soit α un réel tel que $1 \leq \alpha$. On pose $I(\alpha) = \int_1^\alpha f(x) dx$.

- 1) Calculer l'aire A en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C) , (Δ) et les droites $x = 1$ et $x = e - 1$. Arrondir à 10^{-2} cm^2 près.
- 2) Exprimer $I(\alpha)$ en fonction de α . Montrer que $I(\alpha)$ diverge lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$.

On donne : $\sqrt{2} \approx 1,4$ / $\sqrt{3} \approx 1,7$ / $e \approx 2,72$ / $\ln 2 \approx 0,69$.