

SUJET PRÉPA BAC N°14

Durée : 4 h | Unité graphique : 2 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

NB : Les exercices 1 et 2 ne sont pas liés.

EXERCICE 1 4 PTS

On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^3 - 5z^2 + 9z - 5$.

- 1) Vérifier que $z_0 = 1$ est racine de P , puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
- 2) Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 1 cm. Soit A, B et C les points d'affixes respectives $a = 1, b = 1 + i\sqrt{3}, c = 1 - i\sqrt{3}$.
 - a– Placer les points A, B et C dans le repère et compléter la figure au fur et à mesure.
 - b– Montrer que le triangle ABC est isocèle.
- 3) Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$. On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
 - a– Calculer les affixes respectives de F et de G .
 - b– Montrer que les droites (OC) et (GF) sont perpendiculaires.
- 4) Soit H le quatrième sommet du parallélogramme $COFH$.
 - a– Calculer l'affixe du point H .
 - b– Montrer que $COFH$ est un carré.
 - c– Le triangle AGH est-il équilatéral ? Justifier.

EXERCICE 2 4 PTS

Au cours de l'année 2018, les dépenses X_i et les chiffres d'affaires Y_i d'une grande entreprise sont exprimés en millions de FCFA :

X_i	95	100	110	130	150	170
Y_i	12	12	13	17	20	31

- 1) Représenter le nuage de points $M_i(X_i; Y_i)$ dans un repère orthogonal (1 cm pour 10 en abscisse, 1 cm pour 5 en ordonnée). Le point moyen $G(\bar{x}; \bar{y})$ semble-t-il appartenir au nuage ?
- 2) Un ajustement affine de ce nuage est-il justifié ? Calculer le coefficient de corrélation linéaire r et conclure.
- 3) On effectue un ajustement affine par la méthode de Mayer.
 - a– Former les deux sous-nuages (les trois premiers points, les trois derniers), puis déterminer leurs centres de gravité G_1 et G_2 .
 - b– Déterminer l'équation de la droite (D) passant par G_1 et G_2 . On donnera la valeur de a à 10^{-3} près.
- 4) À l'aide de la droite (D) , estimer :
 - a– Le chiffre d'affaires de l'entreprise si sa dépense est de 140 millions de FCFA.
 - b– La dépense de l'entreprise si son chiffre d'affaires est de 25 millions de FCFA.

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$.

- 1) Justifier que pour tout réel x , on a $x^2 - 2x + 2 > 0$. En déduire D_f .
- 2) Calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de variations.
- 3) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 4) Tracer la courbe (C) de f et la droite (Δ) d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé. On montrera que la droite $x = 1$ est un axe de symétrie de (C) et on tracera les tangentes à (C) aux points d'abscisses 0 et 2.

PARTIE B

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) - 1 - xe^x - x$.

- 1) Calculer $h'(x)$ et $h''(x)$.
- 2) Étudier les variations de h' et en déduire le signe de $h'(x)$ sur $[0; +\infty[$.
- 3) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$ telle que $\alpha \in [0,3; 0,4]$, et vérifier que α est solution de l'équation $f(x) = 1 + xe^x + x$.
- 4) Donner le signe de $h(x)$ sur $[0; +\infty[$.

PARTIE C

On considère le point mobile M défini par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = 1 - \frac{2}{\cos t} \\ y(t) = 2 \tan t \end{cases} \quad t \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$$

- 1) Montrer que la trajectoire de M est une partie de la courbe (C) que l'on précisera.
- 2) Tracer la trajectoire (Γ) de M dans le même repère que (C) .

On donne : $\sqrt{3} \approx 1,73$ / $e \approx 2,718$ / $e^{0,3} \approx 1,350$ / $e^{0,4} \approx 1,492$ / $\ln 2 \approx 0,693$.