

SUJET PRÉPA BAC N°13

Durée : 4 h | Unité graphique : 2 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

NB : Les exercices 1 et 2 ne sont pas liés.

EXERCICE 1 4 PTS

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 2 cm. On considère les points A, B, C et M d'afixes respectives $2i, 1, -1 + 2i$ et Z . On associe le point M' d'afixe z' tel que :

$$z' = \frac{iz + 3}{z - 2i}$$

1)

a– Exprimer z en fonction de z' .

b– Montrer que si M appartient à l'axe des abscisses, son image M' appartient au cercle de centre C et de rayon $\frac{1}{2}$.

2)

a– Vérifier que $z' = \frac{i(z - 2i)}{z - 2i} + \frac{3 + 2}{z - 2i} = i + \frac{5}{z - 2i}$. Donner une interprétation géométrique du module et d'un argument de z' .

b– En déduire que $OM' = \frac{AM}{BM}$ et $\left(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}\right) = \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA}\right) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

3)

a– Montrer que pour tout $z \neq 2i$, $(z' - i) \times (z - 2i) = 5$.

b– En déduire que $BM' \times BM = 5$.

c– En déduire que lorsque le point M parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, les points M' d'afixe z' sont tous sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 4 PTS

Dans une famille donnée, on admet qu'une naissance donne un garçon, une fille ou des jumeaux. Une naissance donne dans 35% des cas un garçon et dans 55% des cas une fille. On admet que le sexe de l'enfant ne dépend pas des naissances précédentes.

1)

a– Quelle est la probabilité pour qu'une naissance donne des jumeaux dans la famille ?

b– Calculer la probabilité pour que les trois premières naissances donnent des filles et la quatrième donne un garçon.

2) On suppose qu'il y a n naissances dans la famille.

a– Calculer en fonction de n la probabilité P_n d'avoir au moins une naissance donnant des jumeaux.

b– Déterminer le nombre minimal n_0 d'enfants pour que P_n soit supérieur ou égal à 0,97.

3) On suppose qu'il y a trois naissances successives dans la famille et l'on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'enfants possibles issus des trois naissances.

a– Déterminer la loi de probabilité de X .

b– Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X .

On donne : $\frac{3}{20} = 0,15$ et $\left(\frac{17}{20}\right)^4 = 0,52$.

PROBLÈME 12 PTS

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$.

- 1) Justifier que pour tout x réel, $x^2 - 2x + 2 > 0$.
- 2) Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
- 3) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 4) Représenter (C) et la courbe (Δ) d'équation $y = x$. On montrera que la droite $x = 1$ est un axe de symétrie de (C) et on placera les points d'abscisses 0 et 2 ainsi que les tangentes à la courbe en ces points.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \frac{\ln(|x - 1|)}{x - 1}$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2 cm.

- 1) Déterminer le domaine de définition D de f puis calculer les limites à ses bornes.
- 2) Montrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une est la droite (D) d'équation $y = x$.
- 3) Étudier les variations de f .
- 4) Étudier la position relative de (C) par rapport à (D) . Déterminer les coordonnées du point B d'intersection aux asymptotes. Montrer que le point B est un centre de symétrie à la courbe (C) .
- 5) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point $A(2; 2)$.
- 6) Construire la courbe (C) .
- 7) Calculer l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

PARTIE C

Soit h la restriction de f à $[1; +\infty[$ et (C^{-1}) la courbe représentative de la bijection réciproque h^{-1} dans le même repère.

- 1) Montrer que h réalise une bijection vers un intervalle J à préciser.
- 2) Dresser en justifiant le tableau de variation de h^{-1} . Expliciter la fonction bijective h^{-1} .
- 3) Expliquer la construction de (C^{-1}) puis construire (C^{-1}) dans le même repère.

On donne : $\ln(0,03) \approx -3,5$; $\ln(0,8) \approx -0,22$; $\ln 2 \approx 0,69$.