

SUJET PRÉPA BAC N°12

Durée : 4 h | Unité graphique : 2 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

NB : Les exercices 1 et 2 ne sont pas liés.

EXERCICE 1 4 PTS

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2 cm. Soit (Γ) la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos t - 2 \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

On considère $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t); y(t))$.

1) Comparer :

a- $M(t + 2\pi)$ et $M(t)$.

b- $M(t + \pi)$ et $M(t)$.

En déduire une réduction possible de l'intervalle d'étude et préciser les éléments de symétrie.

2) Étudier les variations de x et y et donner leurs variations dans un tableau commun sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Déterminer l'équation cartésienne de (Γ) . En déduire le point d'intersection de (Γ) avec l'axe des ordonnées.

4) Construire (Γ) sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

On indique que l'on pourra montrer que sur $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right] : y'(t) = -\sin t - 2 \cos t$ et qu'on peut introduire l'unique réel $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ vérifiant $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$, $\sin \alpha \approx -0,44$ et $\cos \alpha \approx 0,9$.

EXERCICE 2 4 PTS

On munit l'espace d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ d'unité 1 cm et on considère les points A, B et C tels que : $A(2; 1; 3)$, $B(3; 2; 4)$, $C(0; 3; 2)$.

1) Déterminer les coordonnées du point D du parallélogramme $ABCD$. En déduire le résultat.

2) Déterminer $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Interpréter le résultat.

3) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Interpréter le résultat.

4) Calculer l'aire du parallélogramme $ABCD$. En déduire la distance d_1 du point O à la droite (AB) .

5) Vérifier que les points O, A, B et C sont-ils coplanaires.

6) Calculer la distance du point $G(-1; 1; 0)$ au plan ABC .

7) Calculer le volume et la surface de la pyramide $ABCO$ de sommet O et de base triangulaire ABC .

PROBLÈME 12 PTS

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ x - x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2 cm.

PARTIE A

1)

a– Étudier la continuité de f en 0.

b– Étudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter les résultats.

3) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

4)

a– Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β sur $\mathbb{R}^+$.

b– Montrer que $\beta \in]1; e[$ puis donner le signe de $f(x)$ sur D_f .

c– Déterminer la position relative de (C) par rapport à l'axe des abscisses.

5) Calculer les limites de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter ces résultats.

6) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 et d'ordonnée négative.

7) Construire (T) et (C) .

PARTIE B

Soit h la restriction de f à $[1; +\infty[$.

1) Montrer que h réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

2) Donner le sens de variation de h^{-1} puis dresser son tableau de variation.

3) Justifier la construction de la courbe (C^{-1}) de h^{-1} , puis la construire dans le même repère.

PARTIE C

Soit α un réel tel que $0 < \alpha \leq e$. On pose $I(\alpha) = \int_{\alpha}^e f(x) dx$.

1)

a– Interpréter géométriquement $I(\alpha)$.

b– À l'aide d'une intégration par parties, calculer $K = \int_{\alpha}^e x \ln x dx$.

c– En déduire $I(\alpha)$. Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I(\alpha)$.

2) Soit λ un réel supérieur à 1 et $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan délimitée par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e - 1$.

a– En prenant $\lambda = 4$, hachurer le domaine concerné et calculer en cm^2 son aire.

b– Calculer en cm^2 $A(\lambda)$ et montrer que $A(\lambda)$ n'est pas définie lorsque λ tend vers $+\infty$.

On donne : $\ln(0,9) \approx -0,2$; $\ln(1,1) \approx 0,09$; $\ln 2 \approx 0,7$.

