

## SUJET PRÉPA BAC N°11

Durée : 4 h | Unité graphique : 2 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

NB : Les exercices 1 et 2 ne sont pas liés.

## EXERCICE 1 4 PTS

On considère le polynôme  $P$  de variable complexe  $Z$  défini par :

$$P(Z) = Z^3 + (2 - i\sqrt{3})Z^2 + (-2 + 6i\sqrt{3})Z - 12i\sqrt{3}$$

1) Montrer que l'équation  $P(Z) = 0$  admet une solution imaginaire pure que l'on précisera.

2) Déterminer les nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que :

$$P(Z) = (Z - i\sqrt{3})(Z^2 + aZ + b)$$

3) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(Z) = 0$ .

4) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  d'unité 0,5 cm, on considère les points  $A$ ,  $B$  et  $F$  d'affixes respectives  $-7 + 5i$ ,  $-7 - 5i$  et  $i\sqrt{3}$ .

a– Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $F$  dans le repère.

b– Déterminer l'abscisse du point  $F'$  image de  $F$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $-\frac{\pi}{4}$ .

c– Déterminer l'abscisse du point  $A'$  image de  $A$  par la translation du vecteur  $\vec{w}$  d'abscisse  $3 - i$ .

5) On considère les points  $C$  et  $D$  d'abscisses  $Z_C = 2 + i$  et  $Z_D = 2 + 9i$ .

a– Placer les points  $C$  et  $D$ .

b– Déterminer les coordonnées du point  $N$  tel que  $ABCN$  soit un parallélogramme.

c– Écrire sous forme trigonométrique  $Z = \frac{Z_C - Z_A}{Z_D - Z_A}$ . En déduire la position relative des droites  $(AC)$  et  $(BD)$ .

d– Donner la nature du quadrilatère  $ABCD$ .

## EXERCICE 2 4 PTS

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ . L'urne  $U_1$  contient 3 boules noires et 1 boule blanche. L'urne  $U_2$  contient 2 boules blanches et 1 boule noire. Un jeu consiste à jeter un dé cubique parfaitement équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Si la face supérieure du dé présente le numéro 6, on tire au hasard une boule de l'urne  $U_2$ , sinon on tire une boule au hasard de l'urne  $U_1$ . On désigne par :

$S$  : « La face supérieure du dé est 6 »     $N$  : « La boule tirée est noire »

1) Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche sachant que la face supérieure du dé est 6.

2) Calculer la probabilité des événements  $S \cap N$  et  $\bar{S} \cap N$ .

3) Calculer la probabilité de tirer une boule noire.

4) On admet que l'on a tiré une boule blanche. Calculer la probabilité pour que la face supérieure du dé soit 6.

5) Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois une boule noire lorsqu'on effectue trois fois de suite et indépendamment le jeu.

PARTIE A

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{x}{2}} & \text{si } x \leq 0 \\ x\sqrt{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

- 1) Calculer les limites  $f$  aux bornes de  $\mathbb{R}$ .
- 2) Étudier la continuité de  $f$  en 0.
- 3) Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.
- 4) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter les résultats.
- 5) Étudier le sens de variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.
- 6) Montrer que la droite  $(D) : y = x + 1$  est une asymptote à  $(C)$  en  $-\infty$ .
- 7) Tracer la courbe  $(C)$  et ses asymptotes.

On précisera les coordonnées du point  $A$  d'intersection de  $(C)$  et  $(\Delta) : y = x$  pour  $x \geq 0$ .

PARTIE B

Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}_+ :$

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

En déduire au moyen d'une intégration par parties une primitive  $F$  de  $f$  telle que :

$$F(x) = \frac{(x^2 - 1) \ln(1+x)}{2} - \frac{1}{2}(x^2 - 2x)$$

PARTIE C

Soit  $h$  la restriction de  $f$  à  $[1; +\infty[$ .

- 1) Montrer que  $h$  réalise une bijection de  $[1; +\infty[$  vers un intervalle  $J$  à préciser.
- 2) Dresser en justifiant le tableau de variation de  $h^{-1}$ .
- 3) Construire en justifiant la courbe  $(C^{-1})$  de  $h^{-1}$  dans le même repère.

On donne :  $\sqrt{2} \approx 1,4 ; \sqrt{3} \approx 1,7 ; e^{-1} \approx 0,37 ; \ln 2 \approx 0,69$ .