

SUJET PRÉPA BAC N°10

Durée : 4 h | Unité graphique : 2 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

NB : Les exercices 1 et 2 ne sont pas liés.

EXERCICE 1 4 PTS

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 2 cm. On note A le point d'affixe $2 + i$ et B le point d'affixe $1 - 3i$. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe Z , associe le point M' d'affixe Z' définie par :

$$Z' = \frac{Z + 1 - 3i}{Z - 2 - i}$$

1)

a– Calculer les affixes des points O' et B' , images respectives de O et B par f .

b– Placer les points A , O' , B et B' dans le plan.

2)

a– Calculer, pour tout complexe z différent de $2 + i$, le produit $(Z' - 1)(Z - 2 - i)$.

b– En déduire que, pour tout point distinct de A , on a :

$$AM \times AM' = 2 \quad \text{et} \quad \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM} \right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM'} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

3) Démontrer que si M appartient au cercle (C) de centre A passant par O , alors M' appartient à un cercle (C') que l'on précisera le centre et le rayon. Construire (C) et (C') .

4)

a– Déterminer $\angle \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB} \right)$.

b– Démontrer que si M est un point autre que le point A appartenant à la demi-droite (D) d'origine A , alors M' appartient à une demi-droite que l'on précisera.

5) On appelle P le point d'intersection du cercle (C) et de la demi-droite (D) . Placer son image P' sur la figure.

EXERCICE 2 4 PTS

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient 4 boules noires et 2 boules blanches. L'urne U_2 contient 3 boules blanches et 2 boules noires. Un jeu consiste à jeter un dé cubique parfaitement équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Si la face supérieure du dé présente le numéro 5 ou 6, on tire au hasard une boule de l'urne U_2 , sinon on tire une boule au hasard de l'urne U_1 . On désigne par :

S : « La face supérieure du dé est 5 ou 6 » N : « La boule tirée est noire »

1) Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche sachant que la face supérieure du dé est 5 ou 6.

2) Calculer la probabilité des événements suivants : $S \cap N$ et $\bar{S} \cap N$.

3) Calculer la probabilité de tirer une boule noire.

4) On admet que l'on a tiré une boule blanche. Calculer la probabilité pour que la face supérieure du dé soit 5 ou 6.

5) Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois une boule noire lorsqu'on effectue trois fois de suite et indépendamment le jeu.

Données : $\frac{49}{72} \approx 0,680$; $\left(\frac{23}{72}\right)^2 \approx 0,102$.

PROBLÈME 12 PTS

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{1+e^x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

- 1) Calculer les limites f aux bornes de $\mathbb{R}$.
- 2) Étudier la continuité de f en 0.
- 3) Étudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.
- 4) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter les résultats.
- 5) Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variation.
- 6) Montrer que la droite $(D) : y = \frac{1}{2}$ est une asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 7) Tracer la courbe (C) et ses asymptotes.

PARTIE B

Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}_+$:

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

En déduire au moyen d'une intégration par parties que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, une primitive F de f est telle que :

$$F(x) = \frac{(x^2 - 1) \ln(1+x)}{2} - \frac{1}{2}(x^2 - 2x)$$

PARTIE C

Soit h la restriction de f sur $\mathbb{R}_+$.

- 1) Montrer que h réalise une bijection notée h^{-1} vers un intervalle J à préciser.
- 2) Dresser en justifiant le tableau de variation de h^{-1} .
- 3) Construire en justifiant la courbe (C^{-1}) de la fonction bijective h^{-1} dans le même repère.

PARTIE D

On considère la courbe (Γ) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\ln(-t)} \\ y(t) = \frac{t}{\ln(-t)} \end{cases} \quad t \in]-1; 0[$$

- 1) Déterminer une équation cartésienne de (Γ) .
 - 2) Comment obtient-on la courbe (Γ) à partir de la courbe (C) de f ?
 - 3) Construire (Γ) en pointillés dans le repère $((O; \vec{i}; \vec{j}))$.
- On donne : $e \approx 2,72$; $e^{-1} \approx 0,37$; $e^{-0,5} \approx 0,61$; $e^{0,5} \approx 1,65$; $e^{-2} \approx 0,13$.