

SUJET PRÉPA BAC N°9

Durée : 4 h | Unité graphique : 2 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

NB : Les exercices 1 et 2 ne sont pas liés.

EXERCICE 1 4 PTS

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : f'' + 3f' = 4 \sin x \quad (E_2) : f'' + 3f' = 0$$

On désigne par h une solution de (E_2) et par f une solution de (E_1) .

- 1) Résoudre $(E_2) : f'' + 3f' = 0$.
- 2) Déterminer les nombres réels a et b tels que la fonction $g(x) = a \cos x + b \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$ soit une solution de (E_2) .
- 3) Démontrer que si f est une solution de (E_1) , alors $f - g$ est une solution de (E_2) .
- 4) Résoudre (E_1) . En déduire la solution de (E_1) sachant qu'elle s'annule en 0 et que sa dérivée vaut 1 en 0.
- 5) Calculer la valeur moyenne de f sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

EXERCICE 2 4 PTS

NB : les deux questions 1 et 2 sont indépendantes.

1) Soient les intégrales :

$$X = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-x) \cdot \cos^2 x \, dx \quad ; \quad Y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-x) \cdot \sin^2 x \, dx$$

- a- Calculer $X + Y$.
- b- Calculer $X - Y$.
- c- En déduire les valeurs de X et Y .

2) Soient les intégrales :

$$A = \int_0^{\pi} e^{-x} \cdot \cos 4x \, dx \quad ; \quad B = \int_0^{\pi} e^{-x} \cdot \cos^2 2x \, dx \quad ; \quad C = \int_0^{\pi} e^{-x} \cdot \sin^2 2x \, dx$$

- a- À l'aide d'une double intégration par parties, calculer A .
- b- Calculer $B + C$.
- c- Calculer $B - C$.
- d- En déduire les valeurs de B et C .

PROBLÈME 12 PTS

PARTIE A

On considère, $\forall x \in]0; +\infty[$, la fonction numérique $g(x) = x + 1 + \ln x$.

- 1) Calculer les limites de g aux bornes de $D_g =]0; +\infty[$.
- 2) Étudier les variations de g .
- 3)
 - a– Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0,2; 0,3[$.
 - b– Calculer l'image de 1 par g . Interpréter le résultat.
 - c– Montrer que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 1$.
- 4) Donner le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2 + 2(3x - 1)e^{-2x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x \ln x}{x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

- 1) Calculer les limites f aux bornes de $\mathbb{R}$.
- 2) Étudier la continuité de f en 0.
- 3) Étudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.
- 4) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter les résultats.
- 5)
 - a– Établir $f'(x)$ en fonction de x .
 - b– Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses sur $\mathbb{R}$.
- 6) Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variation.
- 7) Tracer la courbe (C) et ses asymptotes.

PARTIE C

Déterminer les réels a et b tels que $F(x) = 2x + (ax + b)e^{-2x}$ soit une primitive de f sur $]-\infty; 0]$.

Soit λ un réel négatif. $A(\lambda)$ est l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$.

- a– Calculer en fonction de λ , $A(\lambda)$.
- b– Que devient cette aire lorsque λ tend vers $-\infty$?

On donne : $\alpha \approx 0,3$; $\ln(0,2) \approx -1,6$; $\ln(0,3) \approx -1,2$; $e^{-2} \approx 0,13$.