

SUJET PRÉPA BAC N°8

Durée : 4 h | Unité graphique : 2 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

NB : Les exercices 1 et 2 ne sont pas liés.

EXERCICE 1 4 PTS

L'objectif est d'étudier la suite (U_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par :

$$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \text{et pour entier naturel } n > 0, \quad U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

1) Soit la fonction numérique définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.a– Calculer la dérivée f' de f . En déduire U_0 .b– Calculer U_1 .2) Prouver que la suite (U_n) est décroissante. (On ne cherchera pas à calculer U_n .)

3)

a– Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à $[0; 1]$ on a : $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$.b– En déduire que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$$

c– Déterminer la limite de U_n .d– En déduire que la suite (U_n) est convergente.

EXERCICE 2 4 PTS

On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 9 \\ U_{n+1} = \frac{U_n^2 + 9}{2U_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 3}$.1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = (V_n)^2$.2) On définit la suite $W_n = \ln(V_n)$, où $\ln(V_n)$ est le logarithme népérien de (V_n) .a– Déterminer la nature de la suite (W_n) .b– Exprimer W_n et V_n en fonction de n .

3)

a– Exprimer la suite U_n en fonction de n .

b– Est-elle convergente ? Justifier.

4) On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$.

a– Exprimer S_n en fonction de n .

PROBLÈME 12 PTS

PARTIE A

On considère la fonction u définie par $u(x) = x + 2 + \ln |x|$.

- 1) Déterminer le domaine de définition D_u de u .
- 2) Calculer les limites aux bornes de D_u .
- 3) Étudier les variations de u .
- 4) La fonction u est-elle bijective sur D_u ? Justifier.
- 5) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $\alpha \in]-3,2; -3,1[$.
- 6) Calculer l'image de 1 par u puis donner le signe de $u(x)$ sur D_u .

PARTIE B

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \ln |x| \quad \text{sur } \mathbb{R}^*$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm.

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- 2) Calculer les limites aux bornes de D_f . Donner si possible une interprétation graphique.
- 3) Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variation.
- 4)
 - a– Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β sur $\mathbb{R}^-$.
 - b– Montrer que $\beta = -1$ et donner le signe de $f(x)$ sur D_f .
 - c– Déterminer la position relative de (C) par rapport à l'axe des abscisses.
- 5) Calculer les limites de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter ces résultats.
- 6) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à (C) au point d'ordonnée nulle et d'abscisse négative.
- 7) Construire (T) et (C) .

PARTIE C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [1; +\infty[$.

- 1) Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser. Déterminer le domaine de $D_{h^{-1}}$.
- 2) Donner le sens de variation de h^{-1} la bijection réciproque de h , puis dresser son tableau de variation.
- 3) Expliquer la construction de la courbe (C^{-1}) de h^{-1} , puis la construire dans le même repère que (C) .

PARTIE D

Soit $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$).

- 1) Calculer l'aire $A(n)$ de la partie du plan délimitée par (C) , (Ox) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = n$.

2) Soit D la partie du plan délimitée par (C) , l'axe (Ox) et les droites $x = 1$ et $x = 2$. On note V le volume du solide engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses.

a– À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^2 (x - 2)e^{1-x} dx$.

b– Calculer en cm^3 le volume V .

On donne : $\ln(3,6) \approx 1,28$; $\ln(3,5) \approx 1,25$; $\ln(0,9) \approx -0,1$.