

SUJET PRÉPA BAC N°7

Durée : 4 h | Unité graphique : 2 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

NB : Les exercices 1 et 2 ne sont pas liés.

EXERCICE 1 4 PTS

Après un test de présélection, une école dispose de 18 candidats dont 12 garçons et 6 filles. Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

A) La direction décide de retenir définitivement 4 candidats en procédant par un tirage simultané parmi les 18 candidats.

1) Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « les candidats retenus sont tous des garçons »

B : « aucune fille n'est retenue »

C : « une fille au moins est retenue »

D : « au plus un garçon est retenu »

2) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de filles retenues.

a– Donner la loi de probabilité de Y .

b– Calculer l'espérance mathématique de Y .

c– Déterminer la fonction de répartition puis la représenter.

B) La direction décide maintenant d'effectuer n fois indépendamment et avec remise le tirage simultané des 4 candidats. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que l'événement A est réalisé.

1– Donner la loi de X .

2– Exprimer $P(X = k)$ en fonction de k .

3– Calculer en fonction de n l'espérance mathématique de X .

4– Calculer en fonction de n la probabilité P_n pour que « A » se réalise au moins une fois.

5– Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que $P_{n_0} > 0,99$.

On donne : $\ln(0,01) = -4,6$; $\ln\left(\frac{89}{91}\right) \approx -0,022$.

EXERCICE 2 4 PTS

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 1 cm. On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z ($z \neq 2 + i$) associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z - 1 + 2i}{z - 2 - i}$$

1) Soit A et B deux points du plan. Démontrer que si A et B ont la même image par f , alors ils sont confondus ou l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on déterminera.

2) Soit I d'affixe -3 .

a– Démontrer que $OMIM'$ est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 4z + 5 = 0$.

b– Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 5 = 0$.

3)

a– Exprimer $(z' + 2)$ en fonction de $(z - 2 - i)$. En déduire une relation entre $|z' + 2|$ et $|z - 2 - i|$, puis entre $\arg(z' + 2)$ et $\arg(z - 2 - i)$.

b– On note $Z_G = 2 + i$ et $Z_K = 2 - i$. Démontrer que tous les M du cercle de centre G et de rayon 2 ont leurs images M' qui sont sur un cercle que l'on précisera.

PROBLÈME 12 PTS

PARTIE A

On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} -x + 2 + x \ln |x| & \text{si } x \in [1; +\infty[\\ x - 2 + e^{1-x} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1) Déterminer D_g et calculer les limites aux bornes de D_g .

2) Étudier la continuité de g en 1.

3) Étudier la dérivabilité de g en 1. En déduire une interprétation graphique.

4) Peut-on prolonger g par continuité en 0 ?

PARTIE B

On considère la fonction f définie par $f(x) = g(x)$ si $x \in D_g$ et $f(0) = 0$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1) Déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f .

2) Étudier la dérivabilité de f en 0. En déduire une interprétation graphique.

3) Calculer $f'(x)$ suivant les valeurs de x .

4)

a– Montrer que (C) admet une branche parabolique en $+\infty$: calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter. Étudier la position de (C) par rapport à la droite $y = -x + 2$ pour $x \geq 1$.

b– Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire une interprétation graphique du résultat.

5) Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

6)

a– Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β avec $\alpha < 0$.

b– Montrer que $\alpha \in]-4,5; -4,3[$.

7) Construire (C) .

8) Soit $h(x) = f(x)$ sur $[1; +\infty[= I$.

a– Montrer que h est bijective de I vers K que l'on déterminera.

On donne : $e^{-1} \approx 0,37$; $\ln 2 \approx 0,69$; $\ln 3 \approx 1,1$.

