

SUJET PRÉPA BAC N°6

Durée : 4 h | Unité graphique : 2 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

NB : Les exercices 1 et 2 ne sont pas liés.

EXERCICE 1 4 PTS

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 1 cm.

On considère le polynôme $P(z) = z^3 - (3 + 2i)z^2 + (2 + 6i)z - 4i$.

A)

1– Montrer que $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_1 que l'on déterminera.

2– Acheter la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$; z_2 et z_3 étant les deux autres solutions réelles.

B) Soient A , B et C les points d'affixes respectives z_1 , z_2 et z_3 .

1– Déterminer l'affixe du point D image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

2– On désigne par k le nombre complexe défini par :

$$k = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

Écrire k sous forme exponentielle. En déduire la nature du triangle ABC .

3– On considère l'application f qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' définie par :

$$Z' = Z \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

a– Donner la nature et les éléments caractéristiques de cette application.

b– Le point G est l'image de A par cette application. Déterminer Z_G .

4– On désigne par N le point d'affixe Z et N' le point d'affixe Z' tel que :

$$Z' = \frac{Z - z_1}{Z - z_2}$$

a– Déterminer géométriquement le module et un argument de Z' .

b– Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points N tels que Z' soit un réel positif non nul.

c– Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points N tels que Z' soit un imaginaire négatif.

5– Faire figure complète. On donne $\sqrt{3} \approx 1,7$.

EXERCICE 2 4 PTS

Le but de cet exercice est de trouver une primitive F de f sur $] -\infty; 1[$ définie par :

$$f(x) = \frac{3x - 1}{(x + 1)^2} + \frac{1}{\sqrt{2 - x}}$$

On pose $\forall x \in] -\infty; 1[: p(x) = \ln(2 - x + \sqrt{(2 - x)^2 + 1})$

a– Calculer $p'(x)$.

b– Déterminer sur $] -\infty ; 1[$ une primitive de $q(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$.

On pose $\forall x \in] -\infty ; 1[, k(x) = \frac{3x-1}{(x+1)^2}$.

a– Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in] -\infty ; 1[$:

$$k(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1}$$

b– Déterminer sur $] -\infty ; 1[$ une primitive de $k(x)$.

3– À l'aide des résultats précédents, trouver une expression de $F(x)$.

b– En déduire l'expression de $F'(x)$ qui s'annule en 0.

PROBLÈME 12 PTS

PARTIE A

On considère, $\forall x \in]0 ; +\infty[$, la fonction numérique $g(x) = 2 - x^2 + 2 \ln x$.

1) Calculer les limites de g aux bornes de $D_g =]0 ; +\infty[$.

2) Étudier les variations de g .

3)

a– Montrer que $\forall x \in]0 ; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $\alpha < \beta$.

b– Calculer l'image de 1 par g . Interpréter le résultat.

c– Montrer que $\alpha \in]0,4 ; 0,5[$ et $\beta \in]1,5 ; 1,6[$ en utilisant les valeurs numériques données.

4) Donner le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \quad \text{sur }]0 ; +\infty[$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unités graphiques $OI = 2$ cm et $OJ = 1$ cm.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

2) Calculer les limites aux bornes de D_f . Donner si possible une interprétation graphique.

3) Démontrer que $f'(x) = \frac{x^2 - 1 - \ln x}{x^2}$, puis en utilisant la Partie A, étudier le signe de $f'(x)$.

4) Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

5) La fonction f admet-elle une bijection sur $]0 ; +\infty[$? Justifier.

6) Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à (C) au point $A(1 ; 3)$.

7) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

b– Étudier la position relative de (C) par rapport à (D) .

8) Construire (T) et (C) .

PARTIE C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [1 ; +\infty[$ et (C') la courbe représentative de la bijection réciproque h^{-1} dans le même repère.

- 1) Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
- 2) Étudier les variations de h^{-1} : la bijection réciproque de h .
- 3) Expliquer la construction de la courbe (C') de h^{-1} , puis la construire dans le même repère.

On donne : $\alpha \approx 0,45 ; f(\alpha) = -0,5 ; \ln(2,55) \approx 0,93 ; \ln(2,56) \approx 0,94 ; \ln(0,5) \approx -0,69$.