

SUJET PRÉPA BAC N°5

Durée : 4 h | Unité graphique : 2 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

NB : Les deux parties A et B de l'exercice 2 sont indépendantes.

EXERCICE 1 4 PTS

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ dont l'unité est le centimètre.

Soient A , B et C trois nombres complexes tels que :

$$A = 1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad B = \sqrt{2}(1 - i) \quad ; \quad C = A \cdot B^2$$

- 1) Calculer le module et un argument de A , B et C .
- 2) Donner la forme exponentielle de A et la forme trigonométrique de B .
- 3) Donner la forme exponentielle de A^{303} .
- 4) Donner la forme trigonométrique de C et la forme algébrique de C .
- 5) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

Soient E , F et G d'affixes respectives $z_E = 3i$, $z_F = 4 + i$ et $z_G = 2 - 3i$.

- 6)
 - a– Placer les points E , F et G dans le repère.
 - b– Déterminer l'affixe du point H pour que $EFGH$ soit un parallélogramme.
- 7) On pose $Z' = \frac{z - z_E}{z - z_F}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
 - a– $|Z'| = 1$.
 - b– Z' soit un imaginaire pur non nul.

EXERCICE 2 4 PTS

Les deux parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

Soit $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$ et $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- 1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2}$.
- 2) Déterminer une primitive de f qui prend la valeur 1 en 0.
- 3) Calculer I .

PARTIE B

Soit $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$, $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x dx$.

- 1) À l'aide d'une double intégration par parties, montrer que $K = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$.

- 2) Calculer $K + L$.
- 3) Calculer $K - L$.
- 4) En déduire les valeurs de K et L .
- 5) En utilisant $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, calculer J .

PROBLÈME 12 PTS

PARTIE A

On considère la fonction numérique h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x - 1 - \ln x$.

- 1) Étudier les variations de h puis dresser son tableau de variation.
- 2) Calculer $h(1)$ et en déduire le signe de $h(x)$ sur $]0; +\infty[$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2} + \ln x = 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \ln x$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2 cm.

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- 2) Calculer les limites aux bornes de D_f . En déduire les conséquences graphiques.
- 3) Étudier la continuité de f en 1.
- 4) Étudier la dérivabilité de f en 1. En déduire une conséquence graphique.
- 5) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \ln x + 3$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
- 6) Calculer $f'(x)$. Mettre au même dénominateur et simplifier.
- 7) En utilisant la partie A, étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .
- 8) Montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x \in D_f$. En déduire la position de (C) par rapport à l'axe des abscisses.
- 9) Construire (C) , ses asymptotes et ses tangentes.

PARTIE C

Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0; 1]$.

- 1)
 - a– Montrer que g est bijective vers un intervalle J à préciser.
 - b– En déduire le domaine de définition de g^{-1} .
- 2) Déterminer les variations de g^{-1} et dresser son tableau de variation.
- 3) Justifier la construction de la courbe $\mathcal{C}^{-1}$ de g^{-1} , puis la construire dans le même repère.

PARTIE D

- 1) Montrer que $F(x) = 2x + x \ln x - 2 \ln x - \frac{1}{x}$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
- 2) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = e$.

3) Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^1 f(x) dx$ et interpréter graphiquement.

On donne : $e^{-1} \approx 0,37 ; e \approx 2,72 ; \ln 2 \approx 0,69 ; \ln 3 \approx 1,1$.