

SUJET PRÉPA BAC N°4

Durée : 4 h | Unité graphique : 2 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

NB : Les exercices 1 et 2 ne sont pas liés.

EXERCICE 1 4 PTS

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ dont l'unité est le centimètre.

Soit $z_0 = 1 - i$ un nombre complexe. On pose $A = \bar{z}_0$, $B = iz_0^2$ et $C = A \cdot B$.

- 1) Calculer le module et un argument de A , B et C .
- 2) Donner la forme exponentielle de A et la forme trigonométrique de B .
- 3) Donner la forme exponentielle de A^{202} .
- 4) Donner la forme trigonométrique de C et la forme algébrique de C .
- 5) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.

On pose $Z' = \frac{z - z_B}{z - z_C}$ avec z_B et z_C les affixes de B et C .

- 6) Soient E , F et G d'affixes respectives $z_E = -2i$, $z_F = 3 + i$ et $z_G = 1 - 3i$.
 - a- Placer les points E , F et G dans le repère.
 - b- Déterminer l'affixe du point H pour que $EFGH$ soit un parallélogramme.
- 7) On pose $Z' = \frac{z - z_E}{z - z_F}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
 - a- $|Z'| = 1$.
 - b- Z' soit un imaginaire pur non nul.

EXERCICE 2 4 PTS

On considère le nombre complexe $z_0 = \frac{4(1+i)}{1-3i}$.

- 1) Écrire z_0 sous forme algébrique.
- 2) En déduire les racines carrées de z_0 .
- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+3i)z + z_0 = 0$.
- 4) On note z_1 la solution dont la partie réelle est positive et z_2 l'autre solution.
 - a- Vérifier que z distinct de $4 - i$, on définit $f(z) = \frac{(2+i)z - 3}{z - (4-i)}$.
Montrer que $f(z) = (2+i) + \frac{5+2i}{z - (4-i)}$.
 - b- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = \sqrt{5}$.
 - c- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un réel.
 - d- Faire figure complète. On donne $\sqrt{16BT} = 41$.

PARTIE A

On considère la fonction Q définie sur $]0 ; +\infty[$ par $Q(x) = 2 + x - 3 \ln x$.

- 1) Déterminer le domaine de définition de Q puis calculer les limites à ses bornes.
- 2) Étudier le sens de variation de Q .
- 3) Calculer $Q(1)$ et déterminer le signe de $Q(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{x-1} - x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x + 2 \ln x}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité 2 cm.

- 1) Déterminer le domaine de définition D de f .
- 2) Calculer les limites aux bornes de D . En déduire une conséquence graphique.
- 3) Étudier la continuité de f en 1 puis sur $\mathbb{R}$.
- 4) Étudier la dérivabilité de f en 1. En déduire une conséquence graphique.
- 5) Montrer que la droite d'équation $y = -\frac{1}{x}$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
- 6) Calculer la dérivée $f'(x)$ de f .
- 7) Dresser le tableau de variation de f .
- 8) Construire la courbe (C) , ses tangentes et ses asymptotes.

PARTIE C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

- 1)
 - a– Montrer que h est bijective de $[1 ; +\infty[$ sur un intervalle K à préciser.
 - b– En déduire le domaine de définition de la fonction bijective h^{-1} .
- 2) Déterminer les variations de h^{-1} et dresser son tableau de variation.
- 3) Justifier le tracé de la courbe C^{-1} de h^{-1} .
- 4) Construire dans le même repère la courbe C^{-1} de h^{-1} .

PARTIE D

- 1) Déterminer les réels a et b tels que $g(x) = \frac{a + b \ln x}{x}$ soit une primitive de $p(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ pour $x \geq 1$.
- 2) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

On donne : $2e^{-1} \approx 0,73 ; e \approx 2,7 ; \ln 2 \approx 0,69 ; \ln 3 \approx 1,1$.