

SUJET PRÉPA BAC N°3

Durée : 4 h | Unité graphique : 2 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

NB : Les exercices 1 et 2 ne sont pas liés.

EXERCICE 1 4 PTS

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 2 cm.

On considère l'équation $(E) : z^3 - (4 + 3i)z^2 + (1 + 10i)z + 6 - 3i = 0$.

1)

a– Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

b– Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

2) Soient les points A, B, C d'affixes respectives $Z_1 = 3i$, $Z_2 = 1 + 2i$ et $Z_3 = 3 - i$.

a– Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

b– Soit K le milieu de $[BD]$, E le symétrique de A par rapport à K , et G l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer Z_K , Z_E et Z_G .

3) On désigne par P le nombre complexe défini par :

$$P = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 - Z_1}$$

Déterminer géométriquement le module et l'argument de P . En déduire la nature du triangle ABC .

4) On désigne par M le point d'affixe Z et M' le point d'affixe Z' tel que :

$$Z' = \frac{Z - Z_1}{Z - Z_2}$$

a– Déterminer géométriquement le module et un argument de Z' .

b– Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M tels que Z' soit un imaginaire pur non nul.

c– Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points M tels que Z' soit un réel strictement positif.

d– Déterminer et construire l'ensemble (E_3) des points M tels que les points M' soient sur le cercle de centre O et de rayon 1.

e– Faire figure complète. On donne $\sqrt{5} \approx 2,2$.

EXERCICE 2 4 PTS

On considère les nombres complexes :

$$Z_1 = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}{2} \quad ; \quad Z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad ; \quad A = \frac{Z_1}{Z_2} \quad \text{et} \quad B = Z_1 \times Z_2$$

1) Donner la forme exponentielle de Z_1 , Z_2 , A et B .

2) Donner la forme algébrique de A .

3) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

PROBLÈME 12 PTS

PARTIE A

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2 cm. On considère la fonction f de courbe représentative (C) dans le plan par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} - 2x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 1) Déterminer en justifiant l'ensemble de définition de f .
- 2) Calculer les limites de f à ses bornes.
- 3) Étudier la continuité de f en 1.
- 4) Étudier la dérivabilité de f en 1, puis interpréter graphiquement le résultat.
- 5) Étudier si possible les branches infinies de f aux bornes de son domaine de définition.
- 6) Étudier les variations de f .
- 7) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point $A(0; 2)$.
- 8) Tracer (C) et ses droites particulières.

PARTIE B

Soit h la restriction de f à $]1; +\infty[$ et (C') la courbe représentative de sa bijection réciproque dans le même repère.

- 1– Montrer que h est bijective vers un intervalle J à préciser. Déterminer le domaine $D_{h^{-1}}$.
- 2– Étudier les variations de h^{-1} . Expliciter la fonction bijective h^{-1} .
- 3– Expliquer la construction de (C') puis construire (C') dans le même repère.

PARTIE C

Soit $M(x; y)$ un point mobile dont les coordonnées en fonction du paramètre t dans le même repère sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + 1 \\ y(t) = -2t^2 + t + 1 \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

- 1– Montrer que la trajectoire du point mobile M est une partie de la courbe (C) que l'on précisera.
- 2– Construire en pointillés la trajectoire du point mobile $M(t)$ dans le même repère.

On donne : $\sqrt{2} \approx 1,4$; $\sqrt{3} \approx 1,7$; $\sqrt{5} \approx 2,2$.