

SUJET PRÉPA BAC N°2

Durée : 4 h | Unité graphique : 2 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

NB : Les exercices 1 et 2 ne sont pas liés.

EXERCICE 1 4 PTS

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, d'unité 2 cm.

Soit A le point d'affixe $z_A = 1 + i$.

- Écrire z_A sous forme exponentielle.
- Soit B le point antécédent de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
 - Déterminer l'affixe z_B sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
 - Quelle est la nature exacte du triangle OAB ?
- On pose la transformation $Z_C = z_A \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$.
 - Donner la nature et les éléments caractéristiques de cette transformation.
 - Écrire z_C sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
 - En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi; \pi]$ l'équation :

$$(\sqrt{3} + 1) \cos x - (\sqrt{3} - 1) \sin x = 2$$

EXERCICE 2 4 PTS

- Déterminer les racines carrées du nombre complexe $w = -3 + 4i$. Écrire chaque racine sous forme exponentielle.
- Donner la forme trigonométrique de w .
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : z^2 - (2 + i)z + (3 + i) = 0$$

- Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 1 cm.
 - Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 3i$ et $z_C = 2 - i$.
 - Montrer que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur non nul.
 - En déduire la nature exacte du triangle ABC .
- Soit f l'application de $\mathbb{P} \setminus \{C\}$ dans $\mathbb{P}$ qui à tout point M d'affixe Z ($Z \neq z_C$) associe le point M' d'affixe :

$$Z' = f(Z) = \frac{Z - 1 - 2i}{Z - 2 + i}$$

- Interpréter géométriquement le module et l'argument de Z' .
- En déduire et construire l'ensemble (E) des points M dont l'image par f a pour affixe un réel pur non nul.

c– En déduire et construire l'ensemble $(\mathcal{D})$ des points M dont l'image par f appartient au cercle de centre O et de rayon 1. On donne $\sqrt{5} \approx 2,2$.

PROBLÈME 12 PTS

PARTIE A

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 3} & \text{si } x > 3 \\ 2 - xe^{x-2} & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1. Montrer que le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$.
2. Calculer les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}$.
3. Étudier la continuité de f en 3.
4. Étudier la dérivabilité de f en 3. Interpréter le résultat.
5. Pour $x > 3$, déterminer les réels a, b tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$.
6. Montrer que la droite $(D) : y = x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
7. Déterminer l'équation réduite de l'asymptote à (C) en $-\infty$.
8. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
9. Construire (C) , ses asymptotes ainsi que ses tangentes aux points remarquables.

PARTIE B

Soit h la restriction de f à $] -\infty; 3]$ et (C') la courbe représentative de la fonction bijective h^{-1} dans le même repère.

1. Montrer que h est bijective vers un intervalle K à préciser.
2. Donner, en justifiant, le sens de variation de h^{-1} , puis dresser son tableau de variation.
3. Justifier la construction de la courbe (C') de h^{-1} dans le même repère.
4. Construire la courbe (C') dans le même repère.

PARTIE C

Soit $M(x; y)$ un point mobile dont les coordonnées en fonction du paramètre t dans le même repère sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par x .
2. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire du point mobile M .
3. En déduire que la trajectoire du point mobile M est une partie de la courbe (C) que l'on précisera.
4. Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse en fonction de t . En déduire sa valeur à $t = 0$.
5. Construire en pointillés la trajectoire du point mobile $M(t)$ dans le même repère.

On donne : $e \approx 2,72$; $\ln 2 \approx 0,69$; $\sqrt{5} \approx 2,2$.