

SUJET PRÉPA BAC N°1

Durée : 4 h | Unité graphique : 2 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

NB : Les exercices 1, 2 et 3 ne sont pas liés.

EXERCICE 1 4 PTS

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$, unité graphique 2 cm.

- Soit $z_0 = 2 + i$.
 - Vérifier que z_0 est solution de l'équation $(E) : z^3 - 5z^2 + 9z - 5 = 0$. En déduire les autres solutions dans $\mathbb{C}$.
 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 5 = 0$.
- On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = -1 + 2i$ et $z_C = 1 - i$.
 - Calculer et écrire sous forme exponentielle $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.
 - En déduire la nature du triangle ABC .
 - Placer les points A, B et C dans le repère.
 - Soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC . Déterminer l'axe du centre Ω et le rayon r de (Γ) .
- Soit $(\mathcal{D})$ l'ensemble des points M d'axe z vérifiant $|z - 3| = |z + 1 - 2i|$.
 - Caractériser géométriquement $(\mathcal{D})$.
 - Déterminer l'axe du point de $(\mathcal{D})$ situé sur l'axe des abscisses.
 - Déterminer l'axe du point de $(\mathcal{D})$ situé sur l'axe des ordonnées.
- On pose $Z = \frac{z - (2 + i)}{z - (1 - i)}$. Montrer que lorsque M décrit $(\mathcal{D})$, le point image de Z décrit un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 4 PTS

NB : Les questions 1, 2 et 3 ne sont pas liées.

- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$.
 - Poser $v_n = \frac{1}{u_n}$ et montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
 - Étudier la monotonie de (u_n) et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = \sqrt{3w_n + 4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Montrer par récurrence que $w_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Montrer que si (w_n) converge, sa limite ℓ vérifie $\ell^2 - 3\ell - 4 = 0$, puis calculer ℓ .
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \leq 4$, puis que (w_n) est croissante. En déduire la limite de (w_n) .
- On considère la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

- a) Décomposer $\frac{1}{k(k+1)}$ en éléments simples.
- b) En déduire l'expression de S_n en fonction de n (somme télescopique).
- c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

PROBLÈME 12 PTS

NB : Les deux parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{(x+1)(x-2)}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1)

- a– Préciser les limites de f aux bornes de son domaine de définition D_f .
- b– En déduire les asymptotes de (C_f) .

2) Déterminer les réels a, b, c tels que $f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$, puis montrer que la droite $y = 1$ est asymptote horizontale à (C_f) .

3)

- a– Montrer que $f'(x) = \frac{-4(2x-1)}{(x+1)^2(x-2)^2}$.
- b– Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

4)

- a– Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ est centre de symétrie de (C_f) .
- b– Construire la courbe (C_f) dans le plan.
- c– Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$, m étant un nombre réel.
- d– Calculer l'aire du domaine délimité par (C_f) , la droite $y = 1$ et les droites $x = 3$ et $x = 5$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x \ln(x+1) - x + 1 & \text{si } x > -1 \\ e^{x+1} - x & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.
- 2)
 - a– Étudier la continuité de f en -1 .

b– Étudier la dérivabilité de f en -1 , puis en déduire que (C) admet une demi-tangente en $(-1 ; 1 + e^0)$ que l'on précisera.

3)

a– Calculer $f'(x)$ suivant les valeurs de x .

b– Donner le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

4) Montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x \in D_f$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution réelle.

5) Construire la courbe (C) , les demi-tangentes et l'asymptote.

6) Soit λ un réel strictement positif inférieur ou égal à 1.

a– À l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la région délimitée par (C) , l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = \lambda$.

b– Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(\lambda)$ et interpréter graphiquement.

7) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-1 ; +\infty[$.

a– Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera. Dresser le tableau de variation de g^{-1} .

b– Construire et justifier la courbe (C^{-1}) de g^{-1} dans le même repère que (C) .

On donne : $\ln 2 \approx 0,69 ; e \approx 2,72$.