

BACCALAURÉAT — SESSION 2024 · 2nd TOUR

Durée : 4 h | Coefficient : 5 | Unité graphique : 2 cm | Calculatrice non autorisée

MENAPLN/SG/DGEC-EXAMEN DU BACCALAURÉAT 2024

PROBLÈME 12 PTS

PARTIE A

On considère la fonction h définie sur $] -1 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = x^2 + 2x + 3 - 2\ln(x + 1)$$

- 1) Étudier le sens de variation de h sur $] -1 ; +\infty[$.
- 2) Calculer $h(0)$, puis montrer que $h(x) > 0$ sur $] -1 ; +\infty[$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x \in]-\infty ; 0[\\ x + 2 \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} & \text{si } x \in [0 ; +\infty[\end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 2 cm.

- 1) Étudier la continuité de f en 0.

2)

a– Montrer que :

$$\forall x \in]-\infty ; 0[, \frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - x}}$$

$$\forall x \in]0 ; +\infty[, \frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{2}{x + 1} \ln(x + 1)$$

b– Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$, puis en déduire la dérivabilité de f en 0.

c– Donner une interprétation graphique des résultats précédents.

- 3) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Donner une interprétation graphique du résultat en $-\infty$.

4)

a– Montrer que pour tout $x \in]-\infty ; 0[$, on a :

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - x} + 2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

b– Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0 ; +\infty[$ et montrer que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{h(x)}{(x + 1)^2}$$

c– En déduire le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.

d– Dresser le tableau de variations de f . (On admettra que $f'(x) < 0$ pour $x \in]-\infty; 0[$)

5)

a– Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

b– Étudier la position de (C) par rapport à (D) sur $]0; +\infty[$.

6) Sur $]0; +\infty[$, la courbe (C) admet une tangente (T) parallèle à (D) en un point A . Déterminer les coordonnées du point A .

7) Tracer (T) , les asymptotes, les demi-tangentes en 0 et (C) dans le repère.

PARTIE C

Soit g la restriction de f à $[0; +\infty[$.

1) Montrer que g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.

2) On appelle (Γ) la courbe représentative de la bijection réciproque g^{-1} de g . Construire (Γ) dans le même repère que (C) .

PARTIE D

1) Montrer que $I = \int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \frac{3(\ln 2)^2}{2}$.

2) Soit A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$. Calculer l'aire A en cm^2 .

On donne : $f(-1) \approx 0,4$ / $f(-3) \approx 0,5$ / $\ln 2 = 0,7$ / $4 + \frac{2 \ln 5}{5} \approx 4,6$ / $1 + \frac{2 \ln 3}{3} \approx 2,8$