

BAC D SESSION DE 2023 — 2nd Tour

Durée : 4 h | Unité graphique : 2 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

EXERCICE 1 4 PTS

On considère le nombre complexe u défini par :

$$u = \frac{3-i}{2+i} + \frac{2+i}{i} - 3(1-2i)^2 - 2(2+i)(3+i)$$

- 1) Montrer que $u = 1 - i$.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système d'inconnues Z_1 et Z_2 :

$$\begin{cases} iZ_1 - Z_2 = -1 + i \\ \frac{1}{2}Z_1 + (1-i)Z_2 = 2 - 5i \end{cases}$$

- 3) Le plan complexe P étant muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives $Z_A = -2i$ et $Z_B = 3 - i$. On considère l'application f définie de $P \setminus \{A\}$ dans P qui, à tout point M d'affixe Z , associe le point M' d'affixe Z' telle que $Z' = \frac{iZ - 3i - 1}{Z + 2i}$.

a– Soit C le point d'affixe u . Calculer l'affixe u' de C' , image de C par f .

b– Montrer que $Z' = \frac{i(Z - 3 - i)}{Z + 2i}$.

c– Interpréter géométriquement le module et l'argument de Z' .

d– Dédurre de la question 3-c) les ensembles des points suivants :

- l'ensemble (Γ) tel que $Z' \in \mathbb{R}^*$
- l'ensemble (Γ_2) tel que $Z' \in i\mathbb{R}^*$
- l'ensemble (Γ_3) tel que $|Z'| = 1$

EXERCICE 2 4 PTS

Un sac contient 6 boules noires, 3 boules vertes et 1 boule rouge indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément 2 boules du sac.

- 1) Calculer la probabilité de tirer deux boules de même couleur.
- 2) Calculer la probabilité de tirer au moins une boule verte.
- 3) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe $(+2)$ si les deux boules ont la même couleur et (-2) si les deux boules sont de couleurs distinctes. Déterminer la loi de probabilité de X .
- 4) On recommence 3 fois la même épreuve, en notant à chaque fois la valeur X obtenue et en remettant les deux boules dans le sac après chaque tirage. Soit Y la variable aléatoire égale à la somme des trois valeurs obtenues par X .
 - a– Déterminer la loi de probabilité de Y .
 - b– Calculer l'espérance mathématique de Y .

c– Déterminer la fonction de répartition de Y .

PROBLÈME 12 PTS

PARTIE A

Soit h la fonction définie sur $] -\infty ; 0[$ par $h(x) = 2 \ln(-x)$.

- 1) Étudier les variations de h , puis dresser son tableau de variation.
- 2) Calculer $h(-1)$ et en déduire le signe de $h(x)$ sur $] -\infty ; 0[$.

PARTIE B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 + 2x \ln |x| & \text{si } x < 0 \\ (x + 2)e^{-x} - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 2)
 - a– Étudier la continuité de f en 0.
 - b– Étudier la dérivabilité de f en 0, puis en déduire que la courbe (C) admet des demi-tangentes au point de coordonnées $(0; 1)$ que l'on précisera.
- 3)
 - a– Calculer $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
 - b– Exprimer $f'(x)$ en fonction de $h(x)$ pour $x \in] -\infty ; 0[$.
 - c– Donner le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
- 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β tel que $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ et $-4 < \beta < -3$.
- 5) Construire la courbe (C) , les demi-tangentes et l'asymptote.
- 6) Soit λ un réel positif inférieur ou égal à 1.
 - a– À l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan définie par les points $M(x; y)$ tels que $\begin{cases} 0 \leq x \leq \lambda \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$.
 - b– Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0.

PARTIE C

Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =] -\infty ; -1[$.

- 1) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
- 2) On note g^{-1} la bijection de g . Dresser le tableau de variation de g^{-1} .
- 3) Construire la courbe (C') de g^{-1} dans le même repère que (C) .

PARTIE D

On considère dans le même repère que (C) la courbe (δ) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{\ln t}{2} \\ y(t) = -\frac{1 + \ln t}{t} + 1 \end{cases} ; \quad t \geq 1$$

- 1) Déterminer une équation cartésienne de (δ) .
 - 2) Expliquer comment peut-on tracer (δ) à partir de (C) , et tracer (δ) en pointillés.
- On donne : $\ln 2 \approx 0,69$; $\ln 3 \approx 1,1$; $e \approx 2,7$; $e^{-1} \approx 0,36$; $e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,22$; $\beta = -3,2$; $\alpha = 1,10$.