

BAC D SESSION DE 2023 — 1^{er} Tour

Durée : 4 h | Unité graphique : 2 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

EXERCICE 1 4 PTS

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$; unité graphique : 2 cm. On considère le polynôme P défini par $P(Z) = Z^3 - (2 + 2i)Z^2 - 2Z - 8 + 4i$.

1)

a– Calculer $P(2i)$ puis déterminer les nombres complexes a et b tels que :

$$P(Z) = (Z - 2i)(Z^2 + aZ + b)$$

b– Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$.

2) On désigne par A , B et C les points dont les affixes respectives sont : $2i$; $3 + i$ et $-1 - i$.

a– Placer les points A , B et C dans le repère.

b– Calculer $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ puis en déduire la nature exacte du triangle ABC .

3) Soit f l'application définie pour tout nombre complexe $Z \neq 3 + i$ par $f(Z) = \frac{(1 - i)Z + 2}{Z - 3 - i}$.

Montrer que pour tout $Z \neq 3 + i$: $f(Z) = (1 - i) \frac{Z + 1 + i}{Z - 3 - i}$.

4) Déterminer :

a– L'ensemble (E) des points M d'affixe Z tels que $|f(Z)| = \sqrt{2}$.

b– L'ensemble (F) des points M d'affixe Z tels que $\arg(Z) = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c– L'ensemble (G) des points M d'affixe Z tels que $|f(Z) - (1 - i)| = 2\sqrt{10}$.

EXERCICE 2 4 PTS

Un sac contient 6 boules noires, 3 boules vertes et 1 boule rouge indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément 2 boules du sac.

1) Calculer la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

2) Calculer la probabilité de tirer au moins une boule verte.

3) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe $(+2)$ si les deux boules ont la même couleur et (-2) si les deux boules sont de couleurs distinctes. Déterminer la loi de probabilité de X .

4) On recommence 3 fois la même épreuve, en notant à chaque fois la valeur X obtenue et en remettant les deux boules dans le sac après chaque tirage. Soit Y la variable aléatoire égale à la somme des trois valeurs obtenues par X .

a– Déterminer la loi de probabilité de Y .

b– Calculer l'espérance mathématique de Y .

c– Déterminer la fonction de répartition de Y .

PARTIE A

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $(E) : y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$.

- 1) Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = axe^{2x} + b$ soit solution de (E) .
- 2) On pose $y = z + g$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle $(E') : z' - 2z = 0$.
- 3) Résoudre l'équation (E') et en déduire les solutions f de (E) .
- 4) Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

- 1)
 - a– Calculer les limites de f en $-\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote (D) dont on précisera l'équation.
 - b– Étudier la position relative de (C) et (D) . Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de (C) et (D) .
- 2) Calculer les limites en $+\infty$ de $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$. Interpréter les résultats obtenus.
- 3)
 - a– Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations.
 - b– En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.
- 4) Construire la courbe (C) et la droite (D) .

PARTIE C

- 1)
 - a– Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

$$I = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} [1 - f(x)] dx$$

- b– Interpréter graphiquement le résultat de I obtenu.

- 2) Calculer $J = \int_{-1}^0 (2x - 1)e^{2x} dx$.

- 3) À l'aide d'une double intégration par partie, calculer $K = \int_{-1}^0 (2x - 1)e^{4x} dx$.

- 4) Soit D l'ensemble des points du plan tels que $-1 \leq x \leq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$, et V le volume en cm^3 du solide de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses.

- a– Exprimer V en fonction de J et K .
 - b– Calculer V .

PARTIE D

On considère dans le même repère que (C) la courbe (δ) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{\ln t}{2} \\ y(t) = -\frac{1 + \ln t}{t} + 1 \end{cases} ; \quad t \geq 1$$

- 1) Déterminer une équation cartésienne de (δ) .
 - 2) Expliquer comment peut-on tracer (δ) à partir de (C) , et tracer (δ) en pointillés.
- On donne : $\ln 2 \approx 0,69$; $\ln 3 \approx 1,1$; $e \approx 2,7$; $e^{-1} \approx 0,36$; $e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,22$; $\beta = -3,2$; $\alpha = 1,10$.