

BAC D SESSION DE 2022 — 2nd Tour

Durée : 4 h | Unité graphique : 2 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

EXERCICE 1 4 PTS

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On considère le polynôme P défini par $P(Z) = Z^3 - (2 + 2i)Z^2 - 2Z - 8 + 4i$.

1)

a– Calculer $P(2i)$ puis déterminer les nombres complexes a et b tels que :

$$P(Z) = (Z - 2i)(Z^2 + aZ + b)$$

b– Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$.

2) On désigne par A , B et C les points dont les affixes respectives sont : $2i$, $3 + i$ et $-1 - i$.

a– Placer les points A , B et C dans le repère.

b– Calculer $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ puis en déduire la nature exacte du triangle ABC .

3) Soit f l'application définie pour tout nombre complexe $Z \neq 3 + i$ par $f(Z) = \frac{(1 - i)Z + 2}{Z - 3 - i}$.

Montrer que pour tout $Z \neq 3 + i$: $f(Z) = (1 - i) \frac{Z + 1 + i}{Z - 3 - i}$.

4) Déterminer :

a– L'ensemble (E) des points M d'affixe Z tels que $|f(Z)| = \sqrt{2}$.

b– L'ensemble (F) des points M d'affixe Z tels que $\arg(Z) = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c– L'ensemble (G) des points M d'affixe Z tels que $|f(Z) - (1 - i)| = 2\sqrt{10}$.

EXERCICE 2 4 PTS

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(U_{n+1}) = 1 + \ln(U_n)$.

1)

a– Montrer que la suite (U_n) est géométrique de raison e .

b– Exprimer U_n en fonction de n .

2) Démontrer que la suite (U_n) est croissante et calculer sa limite.

3) On désigne par S_n la somme des $n + 1$ premiers termes de (U_n) : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$. Exprimer S_n en fonction de n .

4) Soit $S'_n = \ln(U_1) + \dots + \ln(U_n)$.

a– Montrer que $S'_n = n \ln 2 + \frac{n(n+1)}{2}$.

b– En déduire le produit $P = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ en fonction de n .

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3 + 2(1 - x)e^{1+x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

PARTIE A

1)

a– Vérifier que pour $x \neq 0$:

$$f(x) = x^2 \left[1 - \frac{3}{x^2} - 2e^{\frac{x}{x}} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right]$$

b– Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

c– Calculer la limite de f en $-\infty$.

2)

a– Montrer que pour tout réel x : $f'(x) = 2x(1 - e^{1+x})$.

b– En déduire le sens de variations de f , puis dresser son tableau de variations.

3)

a– Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [0; +\infty[$. Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.

b– Montrer que l'équation $f(x) = -3$ admet une unique solution α dans $]1; 2[$.

4) Construire la parabole (P) d'équation $y = x^2 - 3$, puis les courbes (C) et (Γ) de g^{-1} dans le même repère.

PARTIE B

1) Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $k(x) = (1 - x)e^{1+x}$.

a– Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = (-x + 2)e^{1+x}$ est une primitive de k sur $\mathbb{R}$.

b– Soit λ un réel inférieur ou égal à -1 . Déterminer en cm^2 l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C) , la parabole (P) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = \lambda$.

c– Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$.

2) On désigne par (Σ) la partie du plan délimitée par la parabole (P) et les droites d'équations $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ et $y = 0$. Calculer en cm^3 le volume V du solide engendré par la rotation complète de (Σ) autour de l'axe des abscisses.

3) On considère la fonction h définie par $h(x) = x^2 - 3 + 2(1 + |x|)e^{1-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

a– Étudier la parité de h .

b– Comparer h et f sur $]-\infty; 0]$.

c– Sans étudier les variations de h , déduire la construction de la courbe représentative (C') de h . Justifier.

On donne : $e^3 \approx 20,08$; $e \approx 2,72$; $e^2 \approx 7,4$.