

BAC D SESSION DE 2021 — 1^{er} Tour

Durée : 4 h | Unité graphique : 1 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

EXERCICE 1 4 PTS

- 1) Résoudre l'équation différentielle $(E) : 2y' + y = 0$.
- 2) On considère l'équation différentielle $(E') : 2y' + y = (x + 2)e^{-\frac{1}{2}x}$. Déterminer les réels a et b tels que la fonction f définie par $f(x) = (ax^2 + bx)e^{-\frac{1}{2}x}$ soit solution de (E') .
- 3) Démontrer qu'une fonction g est solution de (E') si et seulement si $g - f$ est solution de (E) .
- 4) Dédire de ce qui précède la solution générale de l'équation (E') .

EXERCICE 2 4 PTS

On définit pour tout entier naturel n , les suites (u_n) et (v_n) respectivement par :

$$u_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n)^2 \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(\frac{1}{3}u_n\right)$$

- 1) Démontrer par récurrence que pour tout entier n , $u_n > 0$.
- 2)
 - a- Calculer v_0 .
 - b- Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 2.
- 3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- 4) On pose $S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et $S' = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$.
 - a- Calculer S en fonction de n .
 - b- Prouver que $S' = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} e^S$, puis exprimer S' en fonction de n .

PROBLÈME 12 PTS

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x + 3)e^{-x} + x - 1$$

On note (C) la courbe représentative de f .

PARTIE A

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^x - 2x - 1$.

- 1) Étudier le sens de variation de h .
- 2)
 - a- Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions 0 et α .

b– Montrer que $\alpha \in [1 ; 2]$.

3) Préciser le signe de $h(x)$ en fonction de x .

PARTIE B

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3)

a– Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x} \cdot h(x)$, h étant la fonction définie dans la Partie A. (*Indication : $1 = e^{-x} \times e^x, \forall x \in \mathbb{R}$*)

b– En déduire le sens de variation de f .

4) Dresser le tableau de variation de f .

5)

a– Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C) .

b– Étudier la position relative de (C) par rapport à (Δ) .

c– Calculer les coordonnées du point A , intersection de (C) et (Δ) .

6) Tracer dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la droite (Δ) et la courbe (C) .

PARTIE C

Soit $\mathbb{D}$ la partie du plan limitée par l'axe des ordonnées, la droite (Δ) , la courbe (C) et la droite d'équation $x = 2$. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire de $\mathbb{D}$ en cm^2 .

On donne : $e \simeq 2,72 ; \ln 2 \simeq 0,69$.