

BAC D SESSION DE 2020 — 2nd Tour

Durée : 4 h | Toute calculatrice non programmable autorisée

EXERCICE 1 4 PTS

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 2x + 5$.

On suppose que (E) admet une solution particulière g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$, où a et b sont des réels à déterminer.

- 1) Déterminer les réels a et b .
- 2) Résoudre l'équation différentielle $(E') : y' + 2y = 0$.
- 3) On note f la solution générale de (E) .
 - a– Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E') .
 - b– Dédurre l'expression de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
 - c– Déterminer la solution h de (E) qui s'annule en 0.

EXERCICE 2 4 PTS

Soient les intégrales I et J définies par :

$$I = \int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$$

- 1)
 - a– Montrer que pour tout $x : \cos^4 x = \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x)$ et $\sin^4 x = \sin x (\sin x - \sin x \cos^2 x)$.
 - b– Montrer que $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx - \frac{1}{3}J$ et $J = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx - \frac{1}{2}I$. (On pourra intégrer I et J par parties.)
- 2) Montrer que :
 - a) $I + J = \frac{3\pi}{4}$.
 - b) Calculer $I - J$.
 - c– Dédurre les valeurs de I et J .

PROBLÈME 12 PTS

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 e^{-x} & \text{si } x \in [0; +\infty[\\ x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) + 4 & \text{si } x \in]-\infty; 0[\end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis en déduire deux asymptotes à (C) dont on précisera les équations.
- 2)
- a– Montrer que pour tout $x \in]-\infty ; 0[: f(x) = x \ln |x - 2| - x \ln |x| + 4$.
 - b– Étudier la continuité de f en 0.
 - c– Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{2}{x}\right)$ puis déduire $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln \left(1 - \frac{2}{x}\right)$.
 - d– Montrer que pour tout $x \in [0 ; +\infty[: \frac{f(x) - f(0)}{x} = (x + 4)e^{-x} + \frac{4e^{-x} - 1}{x}$.
 - e– Étudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 3) Étudier le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.
- 4)
- a– Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in]-\infty ; 0[$.
 - b– Déterminer le sens de variation de f' sur $] -\infty ; 0[$ et dresser son tableau de variation.
 - c– En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty ; 0[$.
 - d– En déduire le sens de variation de f sur $] -\infty ; 0[$.
- 5) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
- 6) Construire la courbe (C) .
- 7)
- a– Démontrer que pour tout $x \in [0 ; +\infty[: f(x) = (2x + 4)e^{-x} - f'(x)$.
 - b– À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_0^3 (2x + 4)e^{-x} dx$.
 - c– Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

On donne : $e^{-2} \simeq 0,14$.