

BAC D SESSION DE 2020 — 1^{er} Tour

Durée : 4 h | Toute calculatrice non programmable autorisée

EXERCICE 1 4 PTS

On considère la suite (U_n) définie par : $U_{n+1} = \frac{4(1+2U_n)}{4-U_n}$ et $U_0 = -3$.

1) Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 .

2) Montrer que la suite (U_n) est majorée par -2 .

3)

a– Déterminer le sens de variation de (U_n) .

b– La suite (U_n) est-elle convergente ? Justifier.

4) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = \frac{1}{U_n + 2}$.

a– Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

b– Exprimer V_n en fonction de n . En déduire U_n en fonction de n .

c– Calculer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$ en fonction de n puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

EXERCICE 2 4 PTS

Le tableau suivant donne la distance de freinage nécessaire à une automobile circulant sur une route humide pour s'arrêter. x_i représente la vitesse (en km/h) et y_i la distance de freinage (en m).

x_i	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
y_i	18	26	40	58	76	98	120	148	180	212

1)

a– Construire le nuage de points M_i . (1,5 cm représentera 20 km/h en abscisses et 1,5 cm représentera 50 m en ordonnées.)

b– Un ajustement affine de ce nuage semble-t-il raisonnable ? Justifier la réponse.

2)

a– Construire la droite (Δ) d'ajustement affine obtenue par la méthode de Mayer. On prendra pour premier sous-nuage les cinq premiers points et pour deuxième sous-nuage les cinq derniers.

b– Déterminer une équation de (Δ) sous la forme $y = ax + b$ où a et b sont des réels à préciser.

3) En utilisant l'équation de (Δ) estimer :

a– La distance de freinage pour une vitesse de l'automobile de 150 km/h.

b– La vitesse de l'automobile pour une distance de freinage de 250 m.

PROBLÈME 12 PTS

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1)\ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ (x-2)e^{-x+1} + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Unité graphique 2 cm.

PARTIE A (6 PTS)

- 1) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?
- 2) Étudier la continuité de f en 1.
- 3) Étudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement les résultats.
- 4) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 5) Montrer que l'équation $(E) : f(x) = -2$ admet une solution unique α et que $\alpha \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$.

PARTIE B (2 PTS)

- 1) Déterminer les réels α, β, γ tels que pour tout $x < 1$: $\frac{x^2 - 2x}{x - 1} = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x - 1}$.
- 2) Par une intégration par parties, calculer l'intégrale : $I = \int_0^{1-\frac{1}{e}} (x-1)\ln(1-x) dx$.
- 3) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1 - \frac{1}{e}$.

PARTIE C (4 PTS)

1)

a- Montrer que l'équation (E) équivaut à l'équation $h(x) = x$ où h est la fonction définie sur $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$ par

$$h(x) = 1 - e^{\frac{1}{1-x}}.$$

b- On pose $I = \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$. Montrer que pour $x \in I, h(x) \in I$.

c- Montrer que pour tout $x \in I : |h'(x)| \leq \frac{7}{8}$.

2) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = -1 ; U_{n+1} = h(U_n), n \in \mathbb{N}$.

a- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, U_n \in I$.

b- Montrer que pour tout entier naturel $n : |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{7}{8} |U_n - \alpha|$.

c- En déduire que pour tout entier naturel $n : |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{8}\right)^n$.

d- En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

On donne : $\frac{2}{e} \simeq 0,73 ; \frac{1}{e^2} \simeq 0,13 ; \ln 2 \simeq 0,69 ; \ln \frac{3}{2} \simeq 0,40 ; e^{\frac{2}{3}} \simeq 1,947 ; e^{\frac{1}{2}} \simeq 1,648$.