

BAC D SESSION DE 2019 — 1^{er} Tour

Durée : 4 h | Unité graphique : 4 cm | Toute calculatrice non programmable autorisée

EXERCICE 1 4 PTS

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ unité graphique 1 cm.

Soit P le polynôme définie sur $\mathbb{C}$ pour tout z par :

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + (3i + 3)z - 6 + 2i$$

1) Calculer $P(-i)$, puis en déduire une factorisation de $P(z)$.

2)

a– Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

b– Soient les points A, B et C d'abscisses respectives $z_A = -i; z_B = 2i$ et $z_C = 3 - i$. Placer les points A, B et C dans le repère.

c– Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$, puis interpréter géométriquement le module et un argument de ce quotient. En déduire la nature du triangle ABC .

3) Soit D l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

a– Calculer l'abscisse du point D .

b– Donner la nature exacte du quadrilatère $ABCD$.

EXERCICE 2 4 PTS

Une urne contient cinq boules portant le numéro 2, quatre boules portant le numéro 3 et trois boules portant le numéro 4.

On tire simultanément trois boules de l'urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1) Déterminer les probabilités des événements suivants :

A : « Tirer au moins une boule portant le numéro 3 »

B : « Tirer trois boules portant des numéros tous différents »

C : « Tirer trois boules portant le même numéro »

D : « Tirer trois boules dont exactement deux portent le même numéro »

2) Soit X la variable aléatoire égale à la somme des numéros marqués sur les trois boules tirées.

a– Quelles sont les valeurs prises par X ?

b– Déterminer la loi de probabilité de X .

c– Calculer l'espérance mathématique de X .

3) On appelle succès l'événement E : « $X \geq 10$ ».

a– Calculer la probabilité de E .

b– On répète trois fois l'expérience de manière indépendante. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux succès.

On donne : $\frac{23}{110} = 0,2$ et $\frac{87}{110} = 0,7$.

PROBLÈME 12 PTS

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x + \ln(2x - 3) & \text{si } x \geq 2 \\ -x + 1 + e^{x-2} & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 4 cm. On notera f' la dérivée de f .

PARTIE A (6,5 PTS)

1) Étudier la continuité de f en 2.

2)

a– Vérifier que pour tout $x > 2$: $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -1 + 2 \frac{\ln[2(x - 2) + 1]}{2(x - 2)}$.

b– Étudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3)

a– Calculer la limite de f en $-\infty$.

b– Vérifier que pour tout $x \geq 2$, on a $f(x) = 2 - x \left(1 - \frac{2x - 3}{x} \cdot \frac{\ln(2x - 3)}{2x - 3} \right)$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c– Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4) Montrer que (C) admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $-\infty$.

5)

a– Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ puis étudier son signe.

b– En déduire le sens de variation de f .

c– Dresser le tableau de variation de f .

6) Tracer (C) , (Δ) , la tangente et les demi-tangentes éventuelles.

PARTIE B (3 PTS)

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est dans l'intervalle $I = [3 ; 4]$. (On notera α celle qui est dans I .)

2) On considère la fonction g définie sur $[2 ; +\infty[$ par : $g(x) = 2 + \ln(2x + 3)$.

a– Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$.

b– Montrer que :

i) $g(x) \in I$ pour tout $x \in I$.

ii) $g'(x) \leq \frac{2}{3}$ pour tout $x \in I$.

c– En déduire que pour tout $x \in I$: $|g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha|$.

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier naturel n .

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [3; 4]$.

2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$:

a) $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$; **b)** $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

3) Étudier la convergence de la suite (u_n) .

4) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait : $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

Données numériques : $\ln 2 \simeq 0,7$; $\ln 3 \simeq 1,1$; $\ln 5 \simeq 1,6$; $\ln 10 \simeq 2,3$; $\ln \frac{2}{3} \simeq -0,4$; $e^{-1} \simeq 0,3$; $e^{-2} \simeq 0,1$.