

BAC D SESSION DE 2018 — 2nd Tour

Durée : 4 h | Toute calculatrice non programmable autorisée

EXERCICE 1 4 PTS

La concentration y en (g/L) de micro-organismes dans une culture varie en fonction du temps t en heures, $t \geq 0$, et vérifie la relation (E_1) :

$$y' + \frac{2}{3}y = 2e^{\frac{1}{3}t}$$

1) Résoudre l'équation différentielle (E_2) : $y' + \frac{2}{3}y = 0$.

2) On pose $f(t) = ke^{\frac{t}{3}}$ où k est un nombre réel. Déterminer le réel k pour que la fonction $f : t \mapsto ke^{\frac{t}{3}}$ soit solution de l'équation différentielle (E_1) .

3)

a– Montrer qu'une fonction y est solution de l'équation (E_1) si et seulement si $y - f$ est solution de l'équation (E_2) .

b– En déduire la solution générale y de l'équation (E_1) .

c– Déterminer la solution particulière de (E_1) correspondant à une concentration initiale de 3,25 g/L.

EXERCICE 2 4 PTS

PARTIE A

On considère l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le polynôme :

$$P(z) = z^3 + (1 + 2i)z^2 - (1 - 14i)z - 13$$

1) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on précisera.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

PARTIE B

Soit f l'application définie par $f(z) = \frac{iz}{z+i}$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 2 cm. On considère les points A, B, C et M d'affixes respectives $-i; 2 - 3i; -3 + 2i$ et z .

1) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

2) Montrer que les points A, B et C sont alignés.

3) Déterminer une interprétation géométrique de $|f(z) - i|$ et $\arg[f(z) - i]$.

4)

a– Déterminer et construire l'ensemble (E_4) des points M du plan tel que $|f(z) - i| = \sqrt{2}$.

b– Déterminer et construire l'ensemble (E_5) des points M du plan tel que $\arg[f(z) - i] = \frac{\pi}{4}$.

PROBLÈME 12 PTS

PARTIE A (2,5 PTS).

Soit g la fonction définie par $g(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x$ où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de g puis calculer les limites à ses bornes.
- 2) Étudier les variations de g . Calculer l'image de 1 par f .
- 3) Dédire de l'étude le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B (6 PTS).

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - 1 & \text{si } x < 1 \\ (x-1) \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

- 1) Étudier la continuité de f en 1.
- 2) Étudier la dérivabilité de f en 1, puis interpréter graphiquement les résultats.
- 3)
 - a– Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat.
 - b– Calculer $f'(x)$ et le sens de variation de f .
 - c– Dresser son tableau de variation de f .
- 4)
 - a– Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat.
 - b– Tracer la courbe (C) .

PARTIE C (2 PTS).

- 1) En effectuant une intégration par parties, déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.
- 2) Soit α un réel négatif.
 - a– Déterminer en fonction de α l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe et les droites d'équations $x = \alpha$; $x = 1$ et $y = -1$.
 - b– Déterminer la limite de cette aire lorsque α tend vers $-\infty$.

PARTIE D (1,5 PTS).

- 1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle que l'on précisera.
- 2) On désigne par (C^{-1}) la courbe de f^{-1} , bijection réciproque de f . Justifier la construction de (C^{-1}) puis tracer là.
On donne $e^{-1} = 0,4$.