

BAC D SESSION DE 2018 — 1^{er} Tour

Durée : 4 h | Toute calculatrice non programmable autorisée

EXERCICE 1 4 PTS

1) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $u = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{4}$ sous forme algébrique.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$z^2 + (\sqrt{3} - 7i)z - 4(3 + i\sqrt{3}) = 0$$

3) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité 2 cm.

a– Placer les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 2i$; $Z_B = 4i$ et $Z_C = 3i - \sqrt{3}$.

b– Montrer que $u = \frac{Z_C - 2i}{Z_B - 2i}$.

c– En déduire la nature exacte du triangle ABC .

4) Soit f l'application de $P \setminus \{C\}$ dans P , qui à tout point M d'affixe Z (avec $Z \neq Z_C$) associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z' = f(Z) = \frac{Z - 4i}{Z - 3i\sqrt{3}}$.

a– Interpréter géométriquement le module et l'argument de Z' .

b– En déduire et construire l'ensemble (E) des points M du plan tel que $|f(z) - i| = \sqrt{2}$.

c– Déterminer et construire l'ensemble (D) des points M dont l'image par f est un élément du cercle de centre O et de rayon 1. On donne $\sqrt{3} \simeq 1,7$.

EXERCICE 2 4 PTS

Un sac contient quatre pièces de 500 Francs et six pièces de 200 Francs. Un enfant tire au hasard et simultanément trois pièces de ce sac. On désigne par A l'évènement « tirer une pièce de 500 Francs et deux pièces de 200 Francs ».

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500 F figurant parmi les trois pièces tirées.

1) Calculer la probabilité de l'évènement A .

2)

a– Déterminer les valeurs prises par X .

b– Déterminer la loi de probabilité de X .

c– Calculer l'espérance mathématique de X .

3) L'enfant répète cinq fois l'expérience en remettant à chaque fois les trois pièces tirées dans le porte-monnaie.

Quelle est la probabilité que l'évènement A se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages ?

PROBLÈME 12 PTS

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xe^x}{e^x + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 \ln(x) - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(C) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

PARTIE A (8,5 PTS)

- 1)
 - a– Étudier la continuité de f en 0.
 - b– Étudier la dérivabilité de f en 0, puis interpréter graphiquement le résultat.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter le résultat.
- 3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x + x + 1$.
 - a– Calculer $g'(x)$ puis en déduire le sens de variation de g .
 - b– Calculer les limites de g aux bornes de $\mathbb{R}$.
 - c– Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [-1,28 ; -1,27]$.
 - d– En déduire le signe de $g(x)$.
- 4) Calculer les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}$.
- 5)
 - a– Montrer que $\forall x \in]-\infty ; 0] : f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ puis le sens de variation de f sur $] -\infty ; 0]$.
 - b– Calculer $f'(x) \forall x \in]0 ; +\infty[$. En déduire le signe de $f'(x)$ et le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.
 - c– Dresser le tableau de variation de f .
- 6) Construire les demi-tangentes à l'origine et la courbe (C).

PARTIE B (2 PTS)

On considère la suite (J_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$ par : $J_n = \int_n^{n+1} f(t) dt$.

- 1) Interpréter géométriquement J_n .
- 2)
 - a– Déterminer que $\forall n \geq 3, f(n) \leq J_n$.
 - b– La suite (J_n) est-elle convergente ?
- 3) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

PARTIE C (1,5 PTS)

On considère un point mobile M dont les coordonnées sont données en fonction du paramètre t par :

$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{2t}(t - 1) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- 1) Montrer que la trajectoire de M est une partie de (C) que l'on précisera. Tracer en pointillés la trajectoire de M .
- 2) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse à l'instant t . En déduire sa valeur à $t = \frac{\pi}{4}$.

On donne : $e^{-1,28} = 0,278$; $e^{-1,27} = 0,2808$; $e^{0,5} \simeq 1,7$; $e = 2,7$; $f(\alpha) = -0,28$.