

BAC D SESSION DE 2017 — 2nd Tour

Durée : 4 h | Toute calculatrice non programmable autorisée

EXERCICE 1 4 PTS

On considère la suite numérique (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+2U_n} \end{cases} \quad \text{On admet que } U_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n < 1$.
- 2) Démontrer que (U_n) est croissante et convergente.
- 3) On pose $V_n = \frac{U_n}{1-U_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
 - a– Déterminer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b– Exprimer V_n en fonction de n . En déduire que $U_n = \frac{3^n}{1+3^n}$.
 - c– Calculer la limite de (U_n) .

EXERCICE 2 4 PTS

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 6 cm, on considère la courbe (C) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \frac{\sin^2 t}{2 + \sin t} \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

- 1) On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t); y(t))$.
 - a– Comparer les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$.
 - b– En déduire que l'on peut restreindre le domaine d'étude de (C) à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 2)
 - a– Montrer que $y'(t) = \frac{\sin t \cdot \cos t (4 + \sin t)}{(2 + \sin t)^2}$.
 - b– Étudier le sens de variation de x et y sur $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 3) Tracer (C) après avoir placé les points remarquables avec les tangentes associées.

PROBLÈME 12 PTS

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{1-x} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{x} - \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

PARTIE A

1)

a– Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b– Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

c– Étudier la continuité de f en 1.

2)

a– On pose $X = 1 - x$. Démontrer que pour tout $x < 1$:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -2 \left(\frac{e^X - 1}{X} \right) + e^X$$

c– Étudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3)

a– Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \neq 1$, puis étudier son signe.

b– En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4)

a– Déterminer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]1; +\infty[$. Vérifier que $2,3 < \alpha < 2,4$.

b– Résoudre dans $] -\infty; 1]$ l'équation $f(x) = 0$.

5) Construire la courbe (C) et ses demi-tangentes.

PARTIE B

1) Calculer l'intégrale $\int_1^\alpha \ln x \, dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

2) Soit l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = \alpha$, l'axe des abscisses et la courbe (C) .

a– Déterminer que : $A = (8 - 4\alpha) \ln \alpha + 4\alpha - 4$.

b– $A = 4\alpha + \frac{16}{\alpha} - 12$.

3) On considère un point mobile M dont les coordonnées sont données en fonction du paramètre t par :

$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = -t + 2e^{-t} \end{cases} \quad t \geq 0$$

Montrer que la trajectoire de M est une partie de (C) que l'on précisera.

Données numériques : $e \simeq 2,7$; $\frac{2}{2,3} \simeq 0,87$; $\frac{2}{2,4} \simeq 0,83$; $\ln(2,3) \simeq 0,83$; $\ln(2,4) \simeq 0,88$.

