

BAC D SESSION DE 2017 — 1^{er} Tour

Durée : 4 h | Toute calculatrice non programmable autorisée

EXERCICE 1 4 PTS

1)

a– Écrire sous la forme algébrique le complexe $(1 + i\sqrt{3})^2$.**b**– Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 2z + 19 - 18i\sqrt{3} = 0$.2) Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le système suivant :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -2 \\ z_1^2 - z_2^2 = -4 + \frac{4i\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

3) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = 2 + 3i\sqrt{3}; \quad b = \frac{1}{9}(\bar{a} - 2); \quad c = -a - 2 \text{ et } d = a - b + c$$

(où $\bar{a}$ est le conjugué de a).**a**– Déterminer les nombres complexes b, c et d puis placer les points A, B, C et D dans le plan complexe. (Unité graphique : 2 cm et $\sqrt{3} \simeq 1,7$)**b**– Comparer et interpréter géométriquement un argument et un module du nombre complexe $Z = \frac{c - a}{d - b}$.Préciser alors la nature exacte de $ABCD$.

EXERCICE 2 4 PTS

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1) Déterminer le nombre de tirages possibles.

2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

 A : « Les nombres portés par ces trois boules sont tous des nombres premiers » B : « Les nombres portés par ces trois boules sont tous divisibles par 3 » C : « Deux boules portent un numéro divisible par 3 » D : « Les trois numéros sont multiples de 2 » E : « Les trois nombres portés par ces boules, convenablement rangés, forment trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3 »

PROBLÈME 12 PTS

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{3-x} + 1 & \text{si } x \leq 3 \\ e^{3-x} + x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

PARTIE A

1)

a– Étudier la continuité de f en 3.

b– Étudier la dérivabilité de f en 3 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2)

a– Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b– Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

3)

a– Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 3$ est une asymptote à (C) en $+\infty$. Préciser la position de (C) par rapport à (D) dans $[3; +\infty[$.

b– Étudier la position de (C) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ sur $[0; 2]$.

4)

a– Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 3$ et étudier son signe.

b– En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

5)

a– Déterminer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α . Vérifier que $-1 < \alpha < 0$.

b– Construire la courbe (C) , les droites (D) et (Δ) , et les demi-tangentes au point d'abscisse 3 de (C) .

PARTIE B

1) Calculer l'aire A en cm^2 , de la partie du plan délimitée par la courbe (C) , la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. (On pourra utiliser une intégration par parties.)

2) On considère un point mobile M dont les coordonnées sont données en fonction du paramètre t par :

$$\begin{cases} x(t) = 3 - e^{2t} \\ y(t) = 3e^t - e^{3t} + 1 \end{cases} \quad t \geq 0$$

Montrer que la trajectoire de M est une partie de (C) que l'on précisera.