

BAC D SESSION DE 2016 — 1^{er} Tour

Durée : 4 h | Toute calculatrice non programmable autorisée

EXERCICE 1 4 PTS

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 20$$

1)

a– Écrire sous forme algébrique $(1-i)^2$, puis en déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2i$.

b– Déterminer les nombres b et c pour que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait : $P(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + bz + c)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : P(z) = 0$.

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 1 - i$, $z_B = -1 + i$, $z_C = 1 + 3i$ et $z_D = 3 + i$.

a– Faire une figure.

b– On pose $Z = \frac{z_{BA}}{z_{BC}}$. Écrire Z sous la forme algébrique.

c– Interpréter géométriquement le module et un argument de Z .

d– Quelle est la nature exacte du triangle ABC , puis du quadrilatère $ABCD$?

EXERCICE 2 4 PTS

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points :

$$A(-1; 1; -3); B(-2; 3; -3); C(-2; 1; 0).$$

1) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

2) Soit I le point de coordonnées $(-1; 3; 0)$. Calculer la distance de I au plan (ABC) . Les points A, B, C et I sont-ils coplanaires ?

3)

a– Calculer A_1 l'aire du triangle ABC en unité d'aire.

b– Déterminer le volume V (en unité de volume) de la pyramide de sommet I et de base le triangle ABC .

PROBLÈME 12 PTS

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{1+x} & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{1}{e^{x-1}} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1$ cm et $\|\vec{j}\| = 2$ cm.

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $I = [1; +\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x \ln x$.

- 1) Calculer les limites de g aux bornes de I .
- 2) Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
- 3) Déterminer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur I . Vérifier que $\alpha \in [3,5; 4[$.
- 4) Dédire de ce qui précède le signe de g sur I .

PARTIE B

- 1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2) Étudier la dérivabilité de f en 1.
- 3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et vérifier que pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$.
- 4) En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, puis dresser le tableau de variation de f .
- 5) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.
- 6) Construire (C) , ses tangentes et ses asymptotes.

PARTIE C

On pose $J_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Calculer J_0 .
- 2) Montrer que $J_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3) Montrer que (J_n) est décroissante.
- 4) Montrer que (J_n) est convergente.
- 5) En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n : $3J_{n+1} + (n+1)J_n = e^3$.
- 6) Dédire les valeurs exactes de J_1 et J_2 .