

BAC D SESSION DE 2015 — 2nd Tour

Durée : 4 h | Toute calculatrice non programmable autorisée

EXERCICE 1 4 PTS

Soit l'équation différentielle $(E) : 9y'' + 49y = 0$.

- 1) Résoudre (E) .
- 2) Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 7$.
- 3) Montrer que pour tout réel x : $f(x) = 2\sqrt{3} \cos\left(\frac{7}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$.
- 4) Résoudre dans $]0 ; 2\pi[$ l'équation $f(x) = \sqrt{6}$.
- 5) Calculer la valeur moyenne ν de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{14} ; \frac{3\pi}{7}\right]$.

EXERCICE 2 4 PTS

Une urne contient 3 boules jaunes, 2 boules rouges et 5 boules noires. On extrait simultanément 2 boules de l'urne.

- 1) Quel est le nombre de résultats possibles ?
- 2) Le tirage d'une boule jaune fait gagner 2 points, celui d'une boule rouge fait gagner 1 point, celui d'une boule noire fait perdre 3 points. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de points obtenus à l'issue d'un tirage simultané de 2 boules. Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre X .
- 3) En supposant tous les tirages équiprobables, déterminer la loi de probabilité de X .
- 4) Calculer l'espérance mathématique de X .
- 5) Calculer la variance de X .

N.B. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

PROBLÈME 12 PTS

PARTIE A

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' - 3y = \frac{-3e}{(1 + e^{-3x})^2}$$

On donne une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3x} \times \varphi(x)$.

- 1)
 - a– Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - b– Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$ et de $\varphi'(x)$.
- 2) Sachant que φ est une solution de (E) :
 - a– Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .
 - b– Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x si $f(0) = \frac{e}{2}$.

PARTIE B

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{e^{1-3x}}{1 + e^{-3x}}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 2 cm).

1) Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que (C) admet deux asymptotes dont on donnera les équations.

2)

a– Calculer $h'(x)$ en fonction de x .

b– Déterminer le signe de $h'(x)$. En déduire le sens de variation de h . Dresser son tableau de variations.

3) Tracer (C) et ses asymptotes.

4) Pour tout réel $\alpha > 0$, on pose $I_\alpha = \int_0^\alpha h(x) dx$.

a) Donner une interprétation graphique de I_α .

b) Calculer I_α en fonction de α . Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_\alpha$.

PARTIE C

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \int_0^1 h(x) e^{\frac{x}{n}} dx$,

où h est la fonction définie dans la Partie B.

1)

a– Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n > 0$.

b– Étudier le sens de variations de (U_n) .

c– La suite (U_n) est-elle convergente ?

2)

a– Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_1 \leq U_n \leq e^{\frac{1}{n}} \cdot I_1$.

b– En déduire la limite de la suite (U_n) .

On donne $e \simeq 2,7$; $e^3 \simeq 20$.