

BAC D SESSION DE 2015 — 1^{er} Tour

Durée : 4 h | Coefficient : selon matière | Toute calculatrice non programmable autorisée

EXERCICE 1 4 PTS

Soit le polynôme :

$$P(z) = z^3 - (1 + 2i)z^2 - 3z + 2i - 1 ; \quad z \in \mathbb{C}$$

- 1) Montrer que le polynôme $P(z) = 0$ admet une racine réelle z_0 que l'on déterminera.
- 2) Déterminer trois nombres complexes a, b et c tels que $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.
- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
- 4) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité : 2 cm), on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i ; $2 + i$ et -1 .
 - a) Placer les points A, B et C .
 - b) Soit D l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. Calculer l'affixe de D .
 - c) Calculer le nombre complexe $Z = \frac{z_A}{z_A - z_B}$. Déterminer le module et un argument de Z . En déduire la nature du triangle OAB .

EXERCICE 2 4 PTS

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on donne les points $A(-2; -1; 2)$, $B(6; -5; 3)$, $C(-1; 3; 10)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1.
 - a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
 - b) Interpréter géométriquement ces résultats.
 - c) Calculer les distances AB et AC .
 - d) En déduire la nature exacte du triangle ABC .
- 2) Déterminer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- 3) Montrer que $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = 9\|\vec{u}\|$ et en déduire l'aire du triangle ABC en fonction de la norme de $\vec{u}$.
- 4) Soit $D(1; 1; 1)$ un point de l'espace.
 - a- Calculer $d(D; (ABC))$. Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ?
 - b- Calculer le volume V , en unité de volume, de la pyramide de sommet D et de base le triangle ABC .

PROBLÈME 12 PTS

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1 - x)e^x - 1$.

- 1) Étudier les variations de g .

2) Calculer $g(0)$. En déduire que pour tout $x \neq 0$, on a $g(x) < 0$.

PARTIE B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + 2 \text{ et } x \neq 0 \quad ; \quad f(0) = 3$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

On admettra que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

1)

a– Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Établir que $\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1 - e^{-x}}$ puis déterminer la limite de f en $+\infty$.

En déduire que (C) admet une asymptote horizontale en $+\infty$ dont on donnera l'équation.

2) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est asymptote oblique à la courbe (C) en $-\infty$.

3) Calculer pour tout $x \neq 0$, $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$.

4)

a– Donner le sens de variation de f .

b– Dresser le tableau de variation de f .

5) Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse nulle. Écrire l'équation de (T) .

6) Tracer (D) , (T) et (C) .

PARTIE C

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - x$.

1) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]2; 2,5[$.

2) On pose $I = [2; 2,5]$.

a) Déterminer que pour tout $x \in I$, on a $g(x) > -20$ et $(e^x - 1)^2 \geq 40$.

b) En déduire que si $x \in I$, $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$.

3) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \quad \text{et que} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers α .

d) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

On donne : $\ln 2 = 0,69$; $\ln 10 = 2,3$; $e^2 \simeq 7,39$; $e^{2,5} \simeq 12,18$; $\frac{1}{e^2 - 1} \simeq 0,15$; $\frac{1}{e^{2,5} - 1} \simeq 0,09$; $(e^2 - 1)^2 \simeq 40,83$; $(e^{2,5} - 1)^2 \simeq 125$.